تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال

Operations Research Applications in Business Administration

الدكتور جهاد صياح بني هاني

الدكتور نازم محمود ملكاوي

الدكتور فالح عبد القادر الحوري



الحامد

تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال

Operations Research Applications in Business Administration



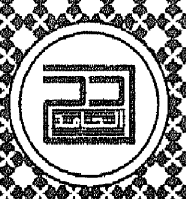


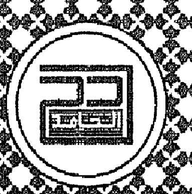
دار الحامد للنشر والتوزيع

الأردن - عمان- ص.ب.: 366 عمان 11941 الأردن
هاتف: 5231081 فاكس: 009626-5235594
E-mail: dar_alhamed@hotmail.com
daralhamed@yahoo.com
www.daralhamed.net



9789957325664







تطبيقات بحوث العمليات

في إدارة الأعمال

تطبيقات بحوث العمليات في
إدارة الأعمال

Operations Research Applications in Business Administration

د. جهاد صياح بني هاني   د. نازم محمود ملكاوي

د. فالح عبد القادر الحوري



رقـــم التصنيـــــــف : 658.4034
المؤلف ومن هـــو في حكمه : جهاد صياح بني هاني، نازم محمود ملكاوي، فالح عبدالقادر الحوري
عنـــوان الكتـــــاب : تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال
رقـــم الإيـــداع : 2013/1/67
الواصفـــــــات : /بحوث العمليات//إدارة الاعمال/
بيـــانــات الناشــر : عمان – دار ومكتبة الحامد للنشر والتوزيع
يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو اي جهة حكومية اخرى.
(ردمك) ISBN 978-9957-32-566-4

تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية.

الطبعة الأولى 2013-1434هـ



دار الحامد للنشر والتوزيع

الأردن - عمان - شفا بدران - شارع العرب مقابل جامعة العلوم التطبيقية
هاتف: 5231081 6 962+ فاكس: 5235594 6 962+
ص.ب. (366) الرمز البريدي: (11941) عمان – الأردن
www.daralhamed.net
E-mail : daralhamed@yahoo.com

الإهداء

إلى أبي الحبيب وأمي الغالية، براً وإحساناً . .

ولأشقائي وشقيقاتي، حباً وعرفاناً . .

ولرفيقة دربي، إخلاصاً ومحبة . .

ولأولادي إبراهيم، وسارة، ومحمد، رضىً وعطفاً

وإلى كل من يؤمن بسلاح الإيمان والعلم

د . جهاد بني هاني

إلى الروح التي غرست فيّ حب العلم والعمل،،، والدي .

إلى نبع الحب والحنان،،، والدتي .

إلى الزوجة الغالية والأبناء

أهدي هذا الجهد المتواضع .

د . نازم ملكاوي

إلى الذين نذروا نذروا حياتهم من أجل البحث عن العلم المعرفة وما توانوا . . . .

إلى منارة طريقي . . . . . والدي أمد الله في عمرهما

إلى رفيقة دربي . . . . . زوجتي

إلى أوار البهجة والسرور . . . . . أولادي: نور الدين، صلاح الدين، وعمار

إلى أخواني | وأخواتي

أهدي هذا الجهد المتواضع

د . فالح الحوري

الحمد والشكر لله الهادي إلى سبيل الرشاد، الموفق بكرمه لطرق السداد، الذي أعاننا وأمدنا بالصبر والعزيمة، ومكننا من إنجاز هذا الكتاب، نحمده كل الحمد وأكمله وأزكاه وأشمله، والصلاة والسلام على أشرف الخلق وسيد المرسلين نبينا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين.

نضع بين يدي الدارس العربي هذا الكتاب الموسوم "تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال" الذي يحتوي على موضوعات أساسية متنوعة في بحوث العمليات والأساليب الكمية قمنا بتدريسها في عدة جامعات وكليات جامعية متوسطة، حيث تم إعداد مادة الكتاب بعد الرجوع إلى معظم الخطط الدراسية المعتمدة في الجامعات الأردنية، وبعض الجامعات العربية. وقد روعي عرض وتقديم الموضوعات المدرجة بأسلوب بسيط، سهل، وميسر ليتمكن الدارس والمدرس والطلبة من الاستفادة من مادة هذا الكتاب، ومساعدة المهتمين في المجالات الإدارية والتجارية والصناعية في إيجاد حلول منطقية للمشكلات التي يواجهوها في هذه المجالات.

وقد وزعت الموضوعات الرئيسة لهذا الكتاب على ثمانية فصول خُصص الفصل الأول لإعطاء فكرة عن طبيعة ومفهوم بحوث العمليات، وتطورها ومجالات تطبيقها ونماذجها المختلفة.

وتعرض الفصل الثاني وبإيجاز لموضوع نظرية القرارات من حيث أنواع القرارات وطرق اختيار القرار الأفضل تحت الظروف المختلفة.

ثم بُدئ بعد ذلك بالتعرض لموضوع البرمجة الخطية **Linear Programming** كأحد أشهر الطرق في معالجة الكثير من المشكلات التي تواجهها بحوث العمليات.

فقد ركز الفصل الثالث على موضوعين أساسيين الأول: صياغة وبناء نموذج البرمجة الخطية، أي تحويل المشكلة إلى نموذج رياضي. والثاني: استخدام طريقة الحل البياني في التوصل للحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية ذات المتغيرين.

أما الفصل الرابع فقد تناول معالجة مسائل البرمجة الخطية بعدة متغيرات باستخدام طريقة الحل المبسطة، وطريقة المرحلتين، كما تم توضيح الحالات الخاصة التي تظهر عند استخدام طريقة الحل المبسطة.

وتناول الفصل الخامس موضوع تحليل الحساسية كأحد الموضوعات الأساسية في البرمجة الخطية، كما تم التعرض لموضوع النموذج المقابل.

أما الفصلين السادس والسابع فقد تعرضا لنماذج النقل والتخصيص كنماذج خطية خاصة ذات خوارزميات خاصة لحلها.

ولأهمية موضوع شبكات الأعمال فقد خُصص الفصل الثامن والأخير لموضع إدارة المشاريع من حيث دراسة ومراقبة المشاريع باستخدام المخطط الشبكي وأسلوبي المسار الحرج وبيرت.

ومع عظم الجهد المبذول في إخراج هذا الكتاب بهذه الصورة ومراعاة التفصيل في الكثير من الموضوعات المطروحة من حيث تعدد التمارين، وتعدد الحالات والتعرض للكثير من الموضوعات الخاصة ذات العلاقة المباشرة بمادة الكتاب، بالتأكيد لن يكون ذلك هو الوضع الأمثل. ولذا فإننا نأمل من أعزائنا القراء والدارسين والمدرسين الذين يستخدمون هذا الكتاب أن يزودونا مشكورين بجميع ملاحظاتهم ومقترحاتهم البناءة من أجل تحسين هذا الكتاب.

وفي النهاية نتقدم بخالص الشكر وعظيم التقدير إلى كل من قدم لنا الدعم والمساندة والجو المناسب لإعداد هذا الكتاب. وبعد، اللهم اجعل هذا العمل في ميزان حسناتنا يوم نلقاك. والله من وراء القصد.

المؤلفون

د. جهاد صياح بني هاني dr_jbanihani@yahoo.com

د. نازم محمود الملكاوي n_malkawi@hotmail.com

د. فالح عبد القادر الحوري alhawary2002@yahoo.com

المحتويات

الفصل الأول

المدخل إلى بحوث العمليات

Introduction to Operations Research (OR)

محتويات الفصل

أهداف الفصل:

بعد دراسة هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. تعريف وتوضيح طبيعة ومفهوم بحوث العمليات.
2. التمييز بين بحوث العمليات والتحليل الكمي.
3. مناقشة التطور التاريخي لبحوث العمليات.
4. وصف المجالات التطبيقية لبحوث العمليات.
5. وصف النماذج المختلفة لبحوث العمليات.

الفصل الأول

مدخل إلى بحوث العمليات

Introduction to Operations Research (OR)

1.1 طبيعة ومفهوم بحوث العمليات

The Nature of Operations Research

البحوث تعني التحليل والقياس والمقارنة والتنبؤ، أما العمليات فيقصد بها الحوادث العسكرية المتكونة من الفعاليات والإجراءات الاستراتيجية التي تقع في ميدان الحرب، وهذا يدل على ارتباط مصطلح بحوث العمليات بالجوانب العسكرية.

ما المقصود ببحوث العمليات؟ إن الإجابة الدقيقة عن هذا السؤال ليس أمراً سهلاً بسبب اتساع المجال الذي يطبق فيه هذا الفرع من فروع العلم، ولذلك توجد عدة تعاريف لبحوث العمليات، فهي طرق علمية لصنع قرار يرتبط بعمليات لمنظمة معينة، وهذا التعبير يعتبر تعريف عام بحيث يمكن تطبيقه على كثير من حقول العلم.

عرفت جمعية بحوث العمليات البريطانية بحوث العمليات على أنها تطبيق طرائق العلم على المسائل المعقدة التي تظهر في توجيه منظومات كبيرة من الناس وإدارتها، وفي الآليات، والمواد، والتمويل في الصناعة، وفي الأعمال والحكومة والدفاع. إنها المقارنة المتميزة وهي تطوير نموذج علمي للنظام متضمناً قياسات عوامل كالحظ والمجازفة، وبهما يتحقق توقع ومقارنة نتائج القرارات الاستراتيجية أو التحكمية البديلة وأما الهدف فهو مساعدة الإدارة على تحديد سياستها وطرق عملها وفعلها بشكل علمي. وقد اعتمد على هذا التعريف معظم الإختصاصيين في بحوث العمليات.

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقد قدمت تعريفاً أقصر وإن كان مشابهاً، فأشارت بأن بحوث العمليات تهتم بالتقرير العلمي عن كيفية الحصول على أفضل تصميم وتشغيل لمنظومات الآلة والإنسان في ظروف تحتاج في العادة إلى تخصيص الموارد النادرة.

و يمكن إعطاء تعريف آوضح لبحوث العمليات كما يلي: هي استخدام الأساليب والطرق العلمية لتنظيم تعاون العمليات والأنشطة ضمن نظام معين بهدف إيجاد حل أمثل أو حلول مثلى لمشكلات هذا النظام من بين جملة من الحلول الممكنة.

ولبحوث العمليات عدة سمات رئيسة هي:

أولاً: استخدام الأساليب والطرق العلمية وذلك بالبدء أولاً بدراسة المشكلة المطروحة وتحديدها بشكل دقيق ومن ثم صياغتها صياغة علمية تشمل جميع جوانب المسألة قيد الدراسة، وتُمَكن هذه الصياغة من بناء نموذج علمي للمسألة أو للمشكلة وهو غالباً ما يكون نموذجاً رياضياً (Mathematical Model) يستوعب روح وجوهر المشكلة ويمثل خواصها الرئيسة تمثيلاً كافياً واضحاً بحيث تكون الحلول الناتجة من هذا النموذج صالحة للتطبيق على واقع المشكلة التي نواجهها كذلك يجب أن يعطي النموذج نتائج إيجابية مفهومة لصانعي القرارات.

ثانياً: تساهم بحوث العمليات في التخلص من التعارضات بين مختلف وظائف (إدارات) أي منظمة بطريقة تجعل المنظمة ككل أكثر انسجاماً وتناسقاً وبطريقة تقود إلى إيجاد حل يوازن بين متطلبات جميع وظائف المنظمة بحيث يكون هذا الحل حلاً أمثل (Optimal Solution) من بين جملة من الحلول الممكنة.

ثالثاً: الاستعانة بخبرات المختصين في الحقول الأخرى للمساهمة في تقديم المعلومات اللازمة لفهم وإحاطة المسألة المطروحة بشكل جيد ومن ثم صياغة المشكلة صياغة صحيحة وإيجاد النموذج السليم والملائم لحلها وإيجاد الحل الأمثل لها بحيث يمكن تطبيقه على المشكلة المطروحة بشكل عملي وفعال.

رابعاً: تهدف بحوث العمليات بالدرجة الأولى: إلى إيجاد حل أمثل أو عدة حلول مثلى لمشكلة معينة قيد الدراسة من بين جملة من الحلول الممكنة ومع أن المشكلات التي تتعرض بحوث العمليات لحلها هي مشكلات قرارية معقدة أحياناً فإن تحسين الأمور الجارية لا يعني حلاً أمثل لهذه المشكلات بل لا بد من استعراض جميع الحلول الممكنة (البدائل) وإجراء اختبار عليها لمعرفة أنسبها أو أفضلها لاختياره.

2.1 بحوث العمليات كمدخل كمي لصنع القرارات الإدارية

1.2.1 عملية صنع القرارات الإدارية

القرار هو مرحلة من عملية مستمرة تتضمن تصميم عدة بدائل ومن ثم مقارنة وفرز أفضلها في سبيل تحقيق هدف أو أهداف محددة ترتبط وتعبر عن تطلعات أصحاب المصالح.

أما عملية صنع القرارات فهي الاختيار القائم على أساس بعض المعايير مثل تخفيض التكاليف، اكتساب حصة أكبر من السوق، توفير الوقت، زيادة حجم الإنتاج والمبيعات، وغيرها من المعايير. ويتأثر اختيار البديل الأفضل إلى حد كبير بالمعايير المستخدمة.

لا يوجد معادلة أو صيغة محددة توضح كيفية صنع القرارات الناجحة، أي أنه لا يوجد هناك الوسائل الكافية لتقويم فعالية القرار مقدماً، إنما تقوم عملية صنع القرارات على المنطق وفي كثير من الأحيان على الحكم الشخصي، والمبادرة من قبل صانع القرار، وما ينبغي عمله في هذا الصدد لضمان أفضل قدر من النجاح في صنع القرارات الرشيدة هو ترشيد القرار إلى أقصى حد ممكن بعيداً عن الحكم والاجتهادات والتصورات الشخصية.

تعتبر عملية صنع القرارات محور العملية الإدارية ومهمة المدير الأولى التي تحدد نجاحه أو فشله من خلال القرارات التي يتخذها أو يطبقها، وقد بين "هربرت سيمون Herbert Simon" أحد أبرز مفكري مدرسة اتخاذ القرارات أن عملية صنع القرار الناجح تنطلق من اعتبارين هما:

أ. الجدوى الاقتصادية للقرار بالنسبة للمنظمة كإدارة عُليا وأصحاب مشروع، وقد أطلق على المدير الذي يهتم بهذه الناحية "الرجل الاقتصادي".

ب. الجدوى النفسية والمعنوية للقرار، وتعكس مدى الارتياح النفسي والروح المعنوية ودرجة تجاوب العاملين مع هذا القرار. وقد أطلق على المدير الذي يهتم بهذه الناحية "الرجل الإداري".

وأشار سيمون إلى ضرورة الموازنة بين هذين الاعتبارين في صنع القرار ليكون المدير صاحب القرار الرجل الاقتصادي والإداري في آن واحد.

2.2.1 أنواع القرارات

يوجد العديد من القرارات التي يمكن تصنيفها على أساس الوظائف الأساسية للمنظمة، أو على أساس درجة عدم التأكد.

أولاً: أنواع القرارات حسب الوظائف الأساسية للمنظمة:

1. قرارات تتعلق بإدارة الإنتاج والعمليات ومن أمثلتها: حجم الإنتاج، حجم المصنع، موقع المصنع، التصميم الداخلي للمصنع، طرق الإنتاج، إجراءات الشراء، كمية المخزون، طرق دفع الأجور، مدى البحث الفني.

2. قرارات تتعلق بإدارة التسويق والمبيعات ومن أمثلتها: تحديد الأسواق، موقع مكاتب البيع، تغليف المنتجات، العلامة التجارية المستخدمة، منافذ التسويق المتبعة، السعر، وسائل الترويج، بحوث التسويق المستخدمة.

3. قرارات تتعلق بالتمويل ومن أمثلتها: الهيكل المالي، شروط الائتمان، مقدار رأس المال العامل، طرق الحصول على التمويل، توزيع الأرباح، خطط إعادة التمويل، الإجراءات المحاسبية، الاندماج، التصفية.

4. قرارات تتعلق بإدارة الموارد البشرية ومن أمثلتها: الاستقطاب، الاختيار والتعيين، التدريب، تحليل العمل وتقييمه، تقييم الأداء، طرق الترقية، أسس دفع الأجور والمرتبات.

ثانياً: أنواع القرارات حسب درجة عدم التأكد:

1. القرارات المبرمجة (المهيكلة أو النمطية): هي القرارات التي تكون فيها إجراءات صنع القرار محددة بشكل واضح مسبقاً، وهي القرارات الروتينية التي يتخذها الإداريون ضمن ظروف مؤكدة ومن أمثلتها، إعادة الطلب عند مستوى معين من المخزون.

2. القرارات شبه المبرمجة (شبه المهيكلة): هي القرارات التي تكون فيها الظروف شبه محددة تماماً، كأن تكون بعض الإجراءات محددة مسبقاً، ولكنها ليست كافية لاتخاذ قرار فيها. وتجري عمليات صنع القرار في وضع شبه مؤكد مثل فتح فرع جديد للشركة، فإن معظم إجراءات صنع القرار معروفة مسبقاً، ولكن هناك حاجة لجمع المعطيات حول الظروف غير المؤكدة والخاصة بهذه الحالة الجديدة، قبل صنع واتخاذ القرار.

3. القرارات غير المبرمجة (غير المهيكلة): هي القرارات التي تتخذ في ظروف لا يمكن أن تكون محددة مسبقاً، أي أنه لا توجد إجراءات محددة عند صناعة القرار، وتكون ظروف صنع القرار غير مؤكدة، وغالباً ما يتخذ هذا النوع من القرارات على مستوى الإدارة العُليا.

3.2.1 مراحل عملية صنع القرار

عند صنع قرار معين بخصوص مشكلة إدارية معينة، يتطلب الأمر المرور بالمراحل التالية:

1. تحديد وتعريف المشكلة.
2. تحليل المشكلة.
3. تحديد البدائل.
4. تقييم كل بديل.
5. اختيار أفضل حل (بديل).
6. تحويل القرار إلى عمل فعال ومتابعة تنفيذه.

في الواقع العملي يكون أمام صانع القرار العديد من البدائل الممكنة لاتخاذ القرار بخصوص مشكلة معينة، ولكن ليس من السهل عليه أن يحدد القرار الأمثل دون الاستعانة بمؤشرات كمية أو رقمية كافية لفرز البدائل المختلفة المتوفرة لديه. ويعرف القرار الأمثل بأنه ذلك القرار الذي يعتبر أفضل من يعكس حالة المشكلة التي

اتخذ القرار بصددها، بحيث يوفر لصانعه أمثل الحلول، وهذا يعني أن أي قرار لا يمكن أن يحقق ما يحققه القرار الأمثل، أما متطلبات القرار الأمثل فهي توفر العدد الكافي من البدائل بالشكل الذي يمنح صانع القرار فرصة للقياس والمقارنة، وكلما كانت بدائل صنع القرار مشخصة ومحسوبة وفق أسس علمية وموضوعية أدى ذلك إلى صنع القرار الأمثل، والذي يؤدي بدوره إلى الحصول على الحلول المثلى للمشكلة.

مما سبق يتضح بأن القرار يرتبط بشكل وثيق بالمؤشرات الكمية لما لهذه المؤشرات من دور فعال في توفير الأساس الذي يمكن بواسطته تعزيز قيمة القرار المتخذ.

4.2.1 المدخل الكمي لحل المشكلات الإدارية

يوجد في الإدارة مدخلين أساسيين لحل المشاكل وتجاوز العقبات التي تعترض نشاط المنظمة هما: المدخل الكيفي، حيث يستخدم المدير إلهامه ورأيه الشخصي في مواجهة المشاكل والعقبات، ويعتمد على خبرته في اتخاذ القرارات لحل أو لمواجهة ما يعترضه من مشاكل. أما المدخل الثاني فهو المدخل الكمي أو علم الإدارة Management Science الذي ينظر إلى نشاطات المنظمة بأنها عمليات منطقية يمكن ترجمتها بصورة كمية على شكل نماذج ومعادلات ورموز رياضية، وبظهور الحاسوب أصبح من الممكن استخدام المدخل الكمي على نطاق واسع في معالجة كافة عمليات المنظمة.

مدخل التحليل الكمي هو أسلوب علمي يستخدم الطرق الكمية كأداة لصنع القرارات، ويعتمد على الأرقام والمعادلات والنماذج الرياضية لتوضيح وتحليل المشكلة. في حين أن الأساليب الأخرى في إدارة الأعمال تعتمد على المقارنة والوصف والتحليل بالاعتماد على أساليب البحث العلمي المختلفة.

يبدأ المدخل الكمي العمل من البيانات المجمعة من المصادر المختلفة الداخلية والخارجية، بحيث يتم معالجتها وتحويلها إلى معلومات تفيد في صنع القرارات الإدارية المختلفة. إن الاعتماد على مدخل التحليل الكمي في عملية صنع القرارات يتطلب المرور

بعدد من المراحل المتسلسلة كما هو مبين في الشكل (1-1)، الذي يبين مراحل مدخل التحليل الكمي في حل المشكلات وهي:

أولاً: تعريف وتحديد المشكلة بإيجاز ووضوح Problem Definition

تعتبر هذه الخطوة من أهم وأصعب الخطوات، لأنها أساس للخطوات اللاحقة، ولأن المشاكل التي تواجهها المنظمات ربما ترتبط مع بعضها البعض، وحل مشكلة دون مشكلة أخرى مرتبطة بها يجعل من الحل الكلي للمشكلة غير مفيد، لذلك من الضروري التركيز على عدد قليل من المشاكل التي تواجه منظمات الأعمال، والتي يساهم حلها في زيادة الربحية أو تخفيض التكاليف، وهذا يتطلب خبرة كافية وتمحيص دقيق في تحديد المشكلة، حيث أن الفشل في تحديد المشكلة بدقة و وضوح سينعكس على الحل ويضعف من إمكانية حلها.

ثانياً: بناء وتطوير النموذج الرياضي الممثل للمشكلة Developing a Model

النموذج يعني التمثيل الرياضي للمشكلة المراد حلها. ويتطلب بناء النموذج تعريف وتحديد المتغيرات والمعلمات Parameters المرتبطة بالمشكلة وهما كميات قابلة للقياس. فالمتغير معرض للتغيير وقد يكون مسيطر عليه Controllable Variable أي يمكن تعديله وتغيره كعدد المنتجات التي ترغب مؤسسة ما في إنتاجها مثلاً، وقد يكون المتغير غير مسيطر عليه Uncontrollable Variable أي أنه ثابت ومحدد ولا يمكن تغيره كنسب المواد الكيميائية الداخلة في صناعة الأدوية مثلاً. أما معلمة المشكلة فهي صفة متأصلة في المشكلة ومرتبطة بها ارتباطاً وثيقاً. ويتصف النموذج الجيد بقابليته للحل، والواقعية، وعدم التعقيد، والمرونة (القابلية للتعديل والتغيير)، وإمكانية جمع البيانات المطلوبة له، وأخيراً إمكانية حوسبته أي حل النموذج باستخدام الحاسوب.

ثالثاً: جمع البيانات المطلوبة لبناء النموذج **Acquiring Input Data**

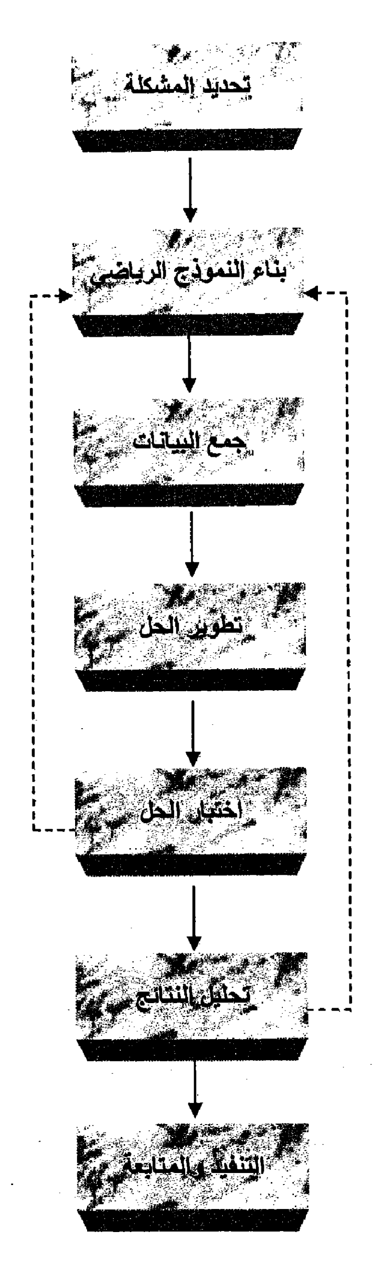
تمثل البيانات مجموعة من الحقائق الأولية غير المنظمة والتي يجب جمعها بحرص وعناية من المصادر الداخلية كالتقارير، والوثائق، والموظفين، أو من المصادر الخارجية كالموردين، والشركات الأخرى.

تُعد البيانات مدخلات للنموذج، وهذا يعني بأن أي خلل أو خطأ في البيانات المجمعة سينتج عنه خلل أو خطأ في الحل.

رابعاً: تطوير الحل **Developing a Solution**

تتم في هذه المرحلة معالجة وحل النموذج المقترح وصولاً إلى الحل الأمثل، وتوجد عدة طرق يمكن من خلالها حل النماذج الرياضية بدءاً من طريقة الخطأ والصواب Trial & Error مروراً بالخوارزميات Algorithms وانتهاءً باستخدام الحاسوب في حل النماذج الرياضية، مرة أخرى دقة وصلاحية النموذج تعتمد على البيانات.

الشكل (1- 1) مراحل أسلوب التحليل الكمي



خامساً: اختبار الحل Testing The Solution

قبل عمليات التحليل والتنفيذ، يجب إجراء اختبار كلي للحل، وهذا يتطلب اختبار البيانات، واختبار النموذج، ويمكن الاستعانة بالأساليب الإحصائية لاختبار البيانات، ويتم اختبار النموذج لمعرفة مدى ملائمته للواقع، ومعظم النماذج المستخدمة في حل المشكلات الإدارية تمت حوسبتها لذلك من السهل اختبار النموذج عن طريق التطبيق الأولي له.

سادساً: تحليل النتائج Analyzing The Results

يبدأ تحليل النتائج من التطبيق الذي يتطلب إجراء تعديلات أو تغيرات معينة داخل المنظمة لمعرفة النتائج المختلفة عند إجراء كل تعديل أو تغيير وهذا ما يدعى بتحليل الحساسية Sensitivity Analysis.

سابعاً: التنفيذ والمتابعة للحل

Results Implementation & Follow Up

التنفيذ هي آخر مرحلة وتعني وضع الحل موضع التنفيذ في المنظمة ومتابعة تنفيذه للتأكد من تحقيقه للهدف منه في حل المشكلة.

5.2.1 مزايا وعيوب بحوث العمليات كمخل كمي لصنع القرارات الإدارية.

إن الأساليب والأدوات الكمية المستخدمة ضمن إطار المدخل الكمي هي ذات الأساليب والأدوات المعتمدة في بحوث العمليات، حيث أن بحوث العمليات عند استخدامها في معالجة المشكلات الإدارية وبالذات تلك التي ترتبط بوظائف المنظمة، لذلك وبالنتيجة فإن بحوث العمليات تعتبر بمثابة المدخل الكمي لاتخاذ القرارات.

وتتضح فائدة بحوث العمليات كمدخل كمي في الواقع العملي من خلال ما يلي:

1. المساهمة في عملية تقريب المشكلة إلى الواقع العملي عن طريق صيغ علمية بسيطة، ونماذج رياضية معينة تعكس حالة المشكلة، وذلك ضمن إطار التفكير العلمي المنتظم، والعقلاني.

2. عرض النتائج المستخلصة من النماذج والعلاقات الرياضية بالشكل الذي يؤمن الفرص المختلفة (البدائل) لعملية صنع القرارات بما يساهم في تفسير كافة عناصر المشكلة.

3. تعميم المعايير القياسية والمثالية لاتخاذ القرارات، حيث أن الإدارة التي تتمكن من وضع نموذج رياضي معين لمشكلة ما ، تستطيع أن تطبق هذا النموذج في المستقبل عندما تواجهها مشكلة مماثلة.

أما المآخذ على بحوث العمليات كمدخل كمي لصنع القرارات فهي:

1. منهج عقيم لا يترك فرصة للسلوك الإنساني والاجتماعي لأخذ أي دور في عملية تفسير المشكلة وحلها.
2. وجود العديد من المشاكل التي يصعب إخضاعها للنماذج الرياضية أو التفسير الكمي والحسابات المجردة. وإنما تخضع لإمكانيات ومهارة وإبداع صانع القرار.
3. عدم توفر الكوادر الفنية المتخصصة في المواقع والأقسام المختلفة التي تظهر فيها المشكلة، لذا فإن توفر الكوادر المتخصصة في صياغة وبناء النماذج الرياضية للمشكلة والتعبير عنها بأرقام وعلاقات رياضية صحيحة يعتبر دعم كبير للمدخل الكمي في صنع القرارات.
4. التكاليف المرتفعة الناتجة عن استخدام المدخل الكمي، بسبب ارتباط استخدامه بالحاسوب، وبالفرق البحثية، وغير ذلك من المتطلبات اللازمة التي من شأنها تحميل المنظمة مبالغ نقدية كبيرة.

3.1 التطور التاريخي لبحوث العمليات

ترجع التطبيقات الأولى لبحوث العمليات إلى بعض الخدمات العسكرية في الحرب العالمية الثانية، حيث كانت الحاجة ملحة لتوزيع الموارد القليلة والنادرة من عتاد وسلاح وذخيرة ومؤن على مختلف الأنشطة العسكرية بطريقة تعطي أفضل النتائج الممكنة، وقد أظهرت الدراسات في ذلك الوقت أن التخطيط الجيد لاستخدام الأسلحة يعطي نتائج أفضل من النتائج التي يعطيها التحسين والتطوير في هذه الأسلحة، وأن

التوزيع المناسب للموارد والمهمات التي تتصف بأنها محدودة يعطي في كثير من الأحيان نتائج لا تقل أهمية عن النتائج التي تعطيها الزيادة في هذه الموارد والمهمات.

وكان من نتائج الدراسات والأبحاث التي قامت بها الفرق العلمية على العمليات العسكرية في الحرب العالمية الثانية أن كسبت بريطانيا الكثير من المعارك في تلك الحرب كما أسهمت جهود هذه الفرق في تحقيق الاستغلال الأمثل للموارد العسكرية المتاحة بشرية منها ومادية كالاستخدام الأمثل للرادارات العسكرية ولقاذفات القنابل، وقد شجعت النتائج التي أحرزتها فرق بحوث العمليات البريطانية الإدارة العسكرية الأمريكية على تكوين فرق مماثلة للاستفادة منها في معالجة مشكلات الطيران والبحرية وإيجاد خطط مثلى لنقل الذخائر والمؤن والمعدات لقواتها المنتشرة في أرجاء متعددة من العالم وقد حققت تلك الفرق نجاحاً ملحوظاً في الاستفادة من بحوث العمليات العسكرية في عملياتها الحربية.

ونتيجة لنجاح بحوث العمليات في المجالات العسكرية فقد أخذت المنظمات المختلفة تهتم وبالتدريج بهذا الفرع من فروع العلم، فمع النمو المتعاظم للصناعة الذي أعقب الحرب العالمية الثانية ومع المشكلات التي نشأت وازدادت تعقيداً نتيجة لهذا النمو السريع ومع ظهور التخصصات المختلفة في مختلف المنظمات فقد كانت الحاجة ملحة لزيادة عدد المختصين بتطبيق بحوث العمليات على مختلف المشكلات وكانت البداية أن عمل الذي اشتغلوا ببحوث العمليات العسكرية في الحرب العالمية الثانية كمستشارين في تقديم الحلول لكثير من المشكلات التي تواجهها منظمات الأعمال الصناعية وأقسامها المختلفة.

وكانت المنظمات الربحية الكبيرة هي من أوائل المنظمات المدنية التي تفهمت من حيث التطبيقات منهجية بحوث العمليات واعتمدتها، حيث كانت شركات النفط من عداد من استخدم على نطاق واسع، وبصورة منتظمة، البرمجة الخطية لتخطيط الإنتاج، وذلك بسبب قدرة الشركات الكبيرة على تحمل تكاليف إجراء البحث الأساسي الذي تحتاجه بحوث العمليات. وقد امتد استخدام بحوث العمليات فيما بعد إلى الشركات الصغيرة. والآن وفي جميع الأحوال، أدركت المؤسسات

الخدمية كالبنوك والمستشفيات والأنظمة التعليمية والقضائية أن بحوث العمليات تستطيع تقديم العون في مجال تحسين الكفاءة التي تستطيع من خلالها تقديم خدماتها بشكل لائق، كما أن بحوث العمليات توفر لأي منظمة ربحية طريقة للحصول على ميزة تنافسية.

إن العامل المهم في سرعة انتشار أسلوب بحوث العمليات ونجاحه المستمر كان التطور الموازي للحواسيب. فمنذ البدء كان الحاسوب أداة ثمينة تمكن محلل بحوث العمليات من إنجاز حسابات تتعذر متابعتها بدون الحاسوب. وإن كثيراً من طرق حل المسائل التي تعد نموذجية الآن لم يكن من المتاح التفكير حالياً باستخدامها عملياً لولا التطور الكبير الذي شهده عالم الحواسيب من حيث السرعة والحجم.

وفي منتصف الخمسينات تقريباً بلغت أنشطة بحوث العمليات في المجال المدني مستوى من التطور بدأ يشير إلى أن هنالك حقلاً فريداً كان في مرحلة التشكل. وقد أنشأت عام 1952 جمعية بحوث العمليات الأمريكية (ORSA) لتلبية الحاجات المهنية للعلماء العاملين في حقل بحوث العمليات. وفي عام 1953 حدثت حركة موازية نجم عنها تشكيل مؤسسة العلوم الإدارية (TIMS). وقد ساعدت المجلات العلمية الصادرة عن هاتين المنظمتين "بحوث العمليات" (Operations Research)، و"علم الإدارة" (Management Science)، وكذلك مؤتمرات أعضائها على تجميع كثير من النتائج المتنوعة في هيكل معرفي متماسك.

وقامت الكثير من الجامعات والمعاهد العلمية ومراكز الأبحاث في الدول المتقدمة بتدريس بحوث العمليات فيها بل وتشكلت في هذه الدول جمعيات ومجالات علمية لبحوث العمليات وعقد الكثير من المؤتمرات العلمية والندوات لتعنى بهذا الحقل من حقول المعرفة، وقد ساهم ذلك وبشكل كبير في تطوير واستحداث الكثير من الأساليب والوسائل والطرق العلمية في بحوث العمليات والتي لم تكن معروفة من قبل مما أسهم في تحقيق المزيد من التطور والتقدم في بحوث العمليات.

وقد انتشر في هذه الأيام تدريس بحوث العمليات في معظم الجامعات في العالم فقلما تجد جامعة إلا وتُعنى بتدريس مقررات في بحوث العمليات، بل وإن بعضها يمنح

درجات متخصصة في بحوث العمليات بدءاً من البكالوريوس ومروراً بالماجستير انتهاء بالدكتوراه.

1.3.1 العوامل التي ساهمت في تطور بحوث العمليات

1. التقدم التكنولوجي المتسارع.
2. ثورة الحاسبات (Computer Revolution) فمعظم المشكلات التي تناولتها بحوث العمليات بالبحث والدراسة والحل تتطلب قدراً كبيراً من الحاسبات، وقد كان لظهور الحاسبات الإلكترونية والرقمية (Digital) منها الفضل الكبير في تطوير وإثراء بحوث العمليات لما لها من إمكانيات حسابية هائلة.
3. التطور الصناعي وزيادة عدد المنظمات الصناعية بعد الحرب العالمية الثانية وظهور الكثير من المشكلات الإدارية المعقدة التي دفعت العلماء والباحثين إلى دراستها وإيجاد الحلول المثلى لها باستخدام الوسائل والأساليب الكمية (بحوث العمليات).
4. البحث العلمي المتواصل الذي أدى إلى ابتكار الكثير من أساليب وطرق بحوث العمليات.
5. تطور المنشآت الصغيرة وزيادة المنظمات الصناعية والزراعية والتجارية والإدارية والاجتماعية والحيوية الأخرى التي استخدمت التحليل الكمي لمعالجة الكثير من المشكلات التي واجهتها.

4.1 المجالات التطبيقية للبحوث العمليات:

يوجد العديد من المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الكثير من النواحي الإقتصادية والصناعية والزراعية والتجارية ومن أهمها:

1- تخطيط وتوزيع الإنتاج:

تهدف المنظمات عادة إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكاليف أو تحسين مستوى الإنتاج وجودته، وقد نجحت بحوث العمليات نجاحاً كبيراً في تقديم أفضل الحلول لهذا

النوع من المشكلات، وتقدم بحوث العمليات طريقة تحقق هدف توزيع الإنتاج بأقل تكلفة ممكنة.

2- مراقبة وضبط المخزون:

تقدم بحوث العمليات طريقة ناجحة في إيجاد حل يوازن بين جميع عناصر مشكلة المخزون كارتفاع مستوى المخزون الذي قد ينتج عنه تلف بعض البضائع بسبب التخزين طويل الأمد، أو انخفاض مستوى المخزون الذي يؤدي إلى خسارة الزبائن في السوق.

3- الاستخدام الأمثل للموارد:

تتصف الموارد بمحدوديتها، بمعنى أن الموارد التي تستخدمها منظمات الأعمال تتصف في كونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها، وترغب المنظمات في توزيع هذه الموارد المحدودة بأفضل طريقة ممكنة ويمكن لبحوث العمليات أن تحل مثل هذه المشكلات بطرق خاصة.

وهنالك العديد من المجالات التطبيقية الأخرى لبحوث العمليات منها ما يتعلق بالمواصلات والنقل كتنظيم حركة المرور وتنظيم رحلات الخطوط الجوية وتنظيم استخدامات الهاتف ومنها ما يتعلق بالتخطيط للمشروعات والموارد البشرية وجدولة الأعمال ومنها ما يتعلق بالمجال العسكري.

5.1 نماذج بحوث العمليات

لقد تعددت النماذج والأساليب والنظريات المختلفة التي تم تطويرها وتطبيقها لحل الكثير من المشكلات المتصلة بالواقع، وفيما يلي نذكر بعض النماذج التي تقدمها بحوث العمليات لحل العديد من المشكلات:

1.5.1 نماذج التحصيص Allocation Models

تتسم الموارد المتوفرة لمنظمة ما بالقلة أو الندرة، لذلك لا بد من توزيع هذه الموارد على الأنشطة المختلفة في المنظمة بطريقة تعطي أفضل النتائج، أي بطريقة تجعل من المنفعة الكلية الناتجة عن هذا التوزيع أفضل ما يمكن، كأن تجعل الأرباح أكبر ما يمكن أو تجعل التكاليف أقل ما يمكن. ويتم معالجة هذه المشكلة عن طريق ما يسمى بالبرمجة الرياضية.

إن الموارد المتوفرة لمنظمة ما كالمواد الخام، والموارد البشرية، والمال، والوقت، والآلات، وغيرها هي موارد محدودة. فإذا كان على المنظمة أن تقوم مثلاً بإنتاج عدد معين من السلع، فإن على إدارة المنظمة أن تقرر عدد الوحدات المنتجة من كل نوع، وهذا يتطلب أن تقرر المنظمة كيفية توزيع الموارد بشكل يتناسب مع عدد الوحدات المنتجة من كل نوع، وهذا ما يسمى بالتحصيص، ومن أشهر أمثلة البرمجة الرياضية هو البرمجة الخطية التي تقدم الحلول لكثير من عمليات التحصيص.

2.5.1 نماذج التخصيص Assignment Models.

وهي حالة خاصة من نماذج النقل، وتبحث في كيفية توزيع عدد معين من الموارد كالأفراد، الآلات، والمنظمات، وغيرها، على عدد من الأعمال بطريقة تجعل المنفعة العائدة من هذا التوزيع (الربح، التكلفة، الزمن) أفضل ما يمكن. ومن الأمثلة على ذلك توزيع عدد معين من العاملين على العدد نفسه من الأعمال، وكإنجاز عدد من المنظمات لعدد من المشروعات.

3.5.1 نماذج النقل Transportation Models.

تبحث هذه النماذج في إيجاد طريقة ذات تكلفة أقل في نقل الموارد من مصادر الإنتاج إلى غايات معينة كمراكز التوزيع والتسويق بطريقة تلبي احتياج هذه الغايات من تلك الموارد في حال كون هذه الأخيرة لا تقل عن هذا الاحتياج، أو بطريقة تستنفذ فيها جميع الموارد في حال كون هذه الموارد أقل من احتياج تلك الغايات. ويمكن تطبيق نماذج النقل في الحالات التي يكون الهدف فيها هو جعل الأرباح أكبر ما يمكن

4.5.1 نماذج الشبكات Network Models.

يمكن وضع الكثير من المشاريع التي تتضمن كثيراً من الأنشطة المتداخلة على شكل شبكة تظهر فيها هذه الأنشطة والحوادث التي تنتج عنها، ومن أمثلة ذلك المشاريع الكبيرة كالجسور، والسدود، والمصانع، ومشاريع شبكات النقل كخطوط الاتصالات السلكية واللاسلكية، والخطوط البرية أو الجوية أو البحرية، وغيرها من المشاريع التي يمكن التعبير عنها على شكل شبكة مكونة من عدة فروع مترابطة. وقد تطورت نظرية تحليل الشبكات ودراستها بشكل أصبح معه من الممكن تخطيط ومراقبة وضبط الموارد والأنشطة لأي مشروع بطريقة تزيد من فعالية تحقيق الأهداف. ومن الأمثلة المشهورة على نماذج الشبكات ما يطلق عليه اسم "برنامج تقويم المشروعات ومراجعتها PERT"، وطريقة "المسار الحرج CPM"، والتي تمكننا من دراسة إمكانية تغيير تسلسل الأنشطة والحوادث لتحقيق إنجاز أفضل (تقليل زمن وتكلفة الإنجاز) للمشروعات ضمن الموارد المتوافرة لدينا.

5.5.1 نماذج التخزين Inventory Models

تعتبر مشكلة تحديد مستوى ملائم من المخزون من المشكلات المهمة التي تواجهها المنظمات بشكل عام. ذلك أن الزيادة أو النقص في مستوى مخزون منظمة قد يعرض هذه المنظمة لمصاعب كثيرة. فزيادة الإنتاج وبالتالي زيادة المخزون تقلل من تكاليف الإنتاج بشكل عام إلا أنها تكون بمثابة رأس مال عاطل إذا لم يتم استهلاكها بالإضافة إلى ما يترتب على ذلك من زيادة في تكاليف التخزين والتي تصل في بعض الأحيان إلى نصف تكاليف الإنتاج. كما أن زيادة الإنتاج قد تؤدي إلى انهيار الأسعار، وبالمقابل فإن تخفيض الإنتاج يؤدي إلى رفع التكاليف والأسعار وخفض تكاليف المخزون، إلا أنه قد يؤدي من جهة ثانية إلى خسارة كبيرة في السوق، ذلك أنّ الزبائن الذين يشترون المنتجات في السوق يرغبون في توفيرها لهم عند الطلب و إلا فإنهم سيتجهون إلى منتج آخر.

وتهتم نماذج التخزين بمعالجة قرارين أساسيين بشأن مستوى المخزون هما:

1. تحديد الكمية التي تطلب دفعة واحدة لرفع مستوى المخزون.
2. تحديد وقت طلب هذه الكمية.

وتساعد نماذج التخزين في الإجابة عن هذين السؤالين بشكل تجعل معه تكاليف التخزين الكلية أقل ما يمكن.

6.5.1 نماذج صفوف الانتظار **Waiting Line Models**.

ومن أمثلة ذلك صفوف المرضى في المستشفيات بانتظار العلاج، وصفوف المواطنين في طوابير لاستخراج وثيقة رسمية من إحدى الدوائر، وصفوف الأجهزة المعطلة بانتظار إصلاحها . . . إلخ. والفرضيات التي تقوم عليها نماذج صفوف الانتظار تتلخص في أن زمن وصول الزبائن (مرضى، مواطنين، أجهزة معطلة . . . إلخ) يكون عشوائياً وأن الخدمة تقدم للزبائن بشكل عام حسب ترتيب وصولهم. وتسمح هذه النماذج بتحديد العدد الأمثل للزبائن الذين يمكن خدمتهم ضمن الطاقة المتوافرة (عدد الذين يقدمون الخدمات والوقت والأجهزة وغيرها يكون في العادة محدوداً) والسبل المثلى لهذه الخدمة.

7.5.1 أساليب المحاكاة **Simulation Techniques**.

تواجه المنظمات أحيانا مشكلات معقدة يصعب إيجاد نموذج رياضي بسيط لحلها. ومن جهة ثانية فإن إجراء التجارب على المنظمة نفسها يكون في معظم الأحيان صعباً وباهظ التكاليف ويحتوي على شيء من المخاطرة. افترض أن مصنعاً ما يقوم بإنتاج عدد من السلع وأن الدراسات التقليدية قد أظهرت أن هنالك زيادة في الطلب على السلعة التي ينتجها المصنع وبالتالي فإن التوسع في الإنتاج سيعود على أصحاب المصنع بفوائد كبيرة. ولذلك فقد قررت إدارة المصنع زيادة ساعات عمل كل من الآلات والعاملين في المصنع بالإضافة إلى شراء مزيد من المواد الخام. إن القيام بتنفيذ مثل هذا القرار قد ينطوي على كثير من المخاطر. فقد يكون السبب في زيادة الطلب على السلعة قد نتج عن خلل أو ظاهرة مؤقتة مما سينتج عنه خسارة كبيرة عند زوالها. وإذا

تم التسليم بأن هذه الظاهرة ليست مؤقتة فقد تظهر مشكلات أخرى متنوعة كعدم جدوى التشغيل الإضافي، ومشكلات في زيادة تكاليف التخزين أو النقل أو تكاليف المواد الخام. وفي مثل هذه الحالات يتم محاكاة Simulate المشكلة المطروحة بعمل صورة تماثل الواقع الفعلي لهذه المشكلة دون المساس بالمنظمة (المصنع) نفسها. وقد يستلزم استخدام مجموعة من الأدوات كالحاسوب أو أي رموز للمشكلة الحقيقية بحيث نستفيد من النتائج التي تم الحصول عليها دون أن نعرض المنظمة لأي خسارة أو ضرر.

8.5.1 نماذج المنافسة Competition Models.

تقوم هذه النماذج بمعالجة مشكلات تتضمن التنافس بين منظمتين أو أكثر هدفه تعظيم المنفعة لبعضهما دون الأخرى. ومن الواضح ترابط القرارات في مثل هذه الحالة بمعنى أن القرارات التي يتخذها طرف أو أكثر من المتنافسين تؤثر بطريقة مباشرة على القرارات التي تتخذها بقية الأطراف. ومن أمثلة ذلك المنافسة بين الشركات بغرض الاحتفاظ بنصيب أكبر في السوق المحلية أو العالمية. وتستخدم عمليات ماركوف Marckov Processes كأداة للتنبؤ بسلوك المستهلكين في المستقبل إذا ما عرف ولاؤهم في الوقت الحاضر لصنف معين من المنتجات وعرفت كذلك الحصص Shares الحالية في السوق لمختلف المتنافسين.

9.5.1 النماذج الديناميكية Dynamic Models.

وتستخدم هذه النماذج لمعالجة مشكلات ذات مراحل زمنية متتابعة ومترابطة، وتعنى هذه النماذج أيضاً بمعالجة مشكلات لا يدخل فيها عنصر الزمن، حيث يتم حل المشكلة وفق خطوات كما لو أنها مراحل زمنية متتابعة ومترابطة. وتعتمد هذه النماذج على مبدأ يسمى مبدأ الأمثلية Principle of Optimality والذي ينص على أن الوصول إلى الحل الأمثل يتم عن طريق إيجاد سلسلة من الحلول المثلى المتتابعة لمراحل المشكلة المترابطة ومن ثم استخدام هذا الترابط لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة ككل.

10.5.1 النماذج السلوكية **Behavioral Models**.

تهتم هذه النماذج بإجراء ثلاثة أنواع من الدراسة، الأول يتعلق بسلوك الفرد في المنظمة، ويتعلق الثاني بسلوك الجماعة في هذه المنظمة، أما الثالث فيتناول دراسة سلوك المنظمة ككل. وقد ظهرت الحاجة لإدراج هذه النماذج في بحوث العمليات بعد أن وجد أن هنالك علاقة قوية بين قناعات ومشجعات الموظفين في منظمة معينة وبين أداء هذه المنظمة. ومن الأمور التي يجب مراعاتها في هذه الأيام هو سلوك المستهلكين ورغباتهم لسلعة معينة عند التخطيط لإنتاجها.

11.5.1 نظرية القرارات **Decision Theory**.

يعتبر التنبؤ بأحداث المستقبل من العوامل الأساسية والهامة والذي يساعد صانعي القرار على اتخاذ القرارات الصحيحة المتعلقة بمشكلات المستقبل، ولكن في مثل هذه الحالات يتم الوصول إلى حلول تقريبية مبنية على احتمالات ما يمكن أن يقع من حوادث في المستقبل. أما احتمالات الحوادث المستقبلية فيمكن أن تعطى بناء على بيانات سابقة أو على خبرة صانعي القرار أو بناءً على أسس أخرى. وتتوافر بذلك بعض المعرفة لصانعي القرار. وبعد تحديد الهدف يتم تحديد مختلف البدائل الممكنة كما يتم أيضاً تحديد العائد لكل من هذه البدائل وفقاً لمعيار أو معايير معينة، كمعيار زيادة الربح، أو معيار تقليل التكاليف، ويتم بعدها حساب العوائد المتوقعة للبدائل المختلفة ليتم اختيار أفضلها وفقاً لهذا المعيار. وتسمى القرارات التي تعتمد على معرفة أو تقدير احتمالات الحوادث "قرارات في حالة المخاطرة" Decisions Under Risk وهناك أنواع أخرى من القرارات مثل قرارات في حالة عدم التأكد

Decisions Under Uncertainty وهي قرارات مبنية على عدم المعرفة باحتمالات الحوادث وتعتمد على بعض المعايير الخاصة. وقرارات في حالة التأكد Decisions Under Certainty وتعتمد على مقارنة عوائد مختلف البدائل، ومن ثم اختيار أفضلها وفقاً لمعيار معين.

12.5.1 الطرق الاستكشافية Heuristic Methods.

وتستخدم هذه الطرق ما يسمى بالذكاء الاصطناعي Artificial Intelligence حيث يزود الحاسوب بالبيانات والمعلومات وطرق التحليل للمشكلة المطروحة ويستطيع الحاسوب بموجبها أن يتصرف كما يتصرف الإنسان الذكي جداً ويصل بالتالي إلى اكتشاف حل جيد للمشكلة.

تعتبر الطرق الاستكشافية تقريبية إلا أنها بدأت تحظى باهتمام كبير في بحوث العمليات نظراً لسهولة التعامل معها بالمقارنة مع الخوارزميات والنماذج الصعبة والمعقدة.

6.1 أسئلة للمناقشة والمراجعة

1. وضح المقصود بالمفاهيم الآتية:

بحوث العمليات، القرار الأمثل، أسلوب التحليل الكمي، النموذج، متغيرات مسيطر عليها، متغيرات غير مسيطر عليها، مبدأ الأمثلية.

2. وضح السمات الرئيسة لبحوث العمليات؟
3. تنطلق عملية صنع القرار الناجح من اعتبارين هامين، بينهما؟
4. تصنف القرارات على أساس الوظائف الأساسية للمنظمة، وعلى أساس درجة عدم التأكد، فسر ذلك؟
5. عدد خطوات مدخل التحليل الكمي في حل المشكلات؟
6. بين خصائص وصفات النموذج الجيد؟
7. ما هي مزايا وعيوب بحوث العمليات كمخل كمي لصنع القرارات الإدارية؟
8. اذكر العوامل التي ساهمت في تطور بحوث العمليات؟
9. وضح أهم المجالات التطبيقية لبحوث العمليات؟ ادعم إجابتك بالأمثلة المناسبة؟
10. تقدم بحوث العمليات العديد من النماذج لحل العديد من المشكلات، بين ذلك؟

7.1 مصادر الفصل الأول

1. البلخي، زيد تميم (2007). **مقدمة في بحوث العمليات**. (ط2)، المملكة العربية السعودية، الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.
2. بقجه جي، صلاح الدين، ومعلا، وائل، ونايفه، محمد، ومراد، حسا، والعوا، محمد نوار (1998). **بحوث العمليات (مترجم)**، سوريا، دمشق: المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر.
3. الحسنية، سليم ابراهيم (2002). **نظم المعلومات الإدارية**. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.
4. الطراونة، محمد، وعبيدات، سليمان (2009). **مقدمة في بحوث العمليات**. الأردن، عمان: دار المسيرة للنشر والتوزيع.
5. العبيدي، محمود، والفضل، مؤيد عبد الحسين (2004). **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.
6. العتيبي، صبحي جبر (2005). **تطور الفكر والأساليب في الإدارة**. الأردن، عمان: دار الحامد للنشر والتوزيع.
7. علي، علي حسين؛ الفضل، مؤيد عبد الحسين، وإبراهيم، نجاح باقر (1999). **بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة**. الأردن، عمان: دار زهران للنشر والتوزيع.
8. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., & Williams, Thomas A. (2004). **An Introduction to Management Science.** (11th ed.), USA, St Paul. MN, West Publishing Company.
9. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), Pearson Education International.

الفصل الثاني

نظرية القرارات

Decision Theory

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد دراسة هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. بناء جدول القرار.
2. وصف الظروف المختلفة لاتخاذ القرار.
3. اختيار أفضل بدائل القرار في ظل ظروف التأكد باستخدام عدة نماذج.
4. اختيار أفضل بدائل القرار في ظل ظروف المخاطرة باستخدام نماذج تعتمد على الاحتمالات.
5. اختيار أفضل بدائل القرار في ظل ظروف عدم التأكد باستخدام عدة نماذج.
6. بناء شجرة القرار.

الفصل الثاني

نظرية القرارات

Decision Theory

1.2 مقدمة

يتوافر لصانعي القرار عادةً عدد كبير وقد يكون لا نهائي أحياناً من الحلول الممكنة للمشاكل التي تواجهها المنظمة ولا بد لهم من اختيار أفضل هذه الحلول (الحل الأمثل) وفقا لمقياس فعالية (معيار) معين. وقد يتوافر لصانع القرار معلومات كاملة عن المشكلة قيد الدراسة، وما على صانعي القرار في هذه الحالة إلا أن يقوموا بمقارنة جميع الحلول الممكنة لها واختيار أفضلها تبعاً لمقياس الفعالية، ويسمى هذا النوع من القرارات والذي يمكن أن تتوافر فيه معلومات كاملة عن المشكلة المعنية "قرار في حالة التأكد" أي قرار محدد، ويعتمد إيجاد الحل الأمثل في النماذج المحددة في بحوث العمليات كالبرمجة الخطية، ونماذج النقل والتخصيص، وغيرها على هذا النوع من القرارات.

وأحياناً تواجه المنظمة نقصاً جزئياً من المعلومات التي تتوافر عن المشكلة التي نواجهها كأن نعرف أو نقدر احتمال ما يمكن أن يقع من حوادث، ونسمي عملية اختيار الحل الأمثل في مثل هذه الحالة "قرار في حالة المخاطرة"، ويستخدم هذا النموذج من القرارات لاختيار الحل الأمثل في النماذج الاحتمالية في بحوث العمليات كما هي الحال في نماذج صفوف الانتظار ونماذج التخزين الاحتمالية، وغيرها. وربما نواجه نقصاً كاملاً في المعلومات المتوفرة عن المشكلة التي نواجهها وتسمى عملية اختيار الحل الأمثل عندئذ "قرار في حالة عدم التأكد".

أياً كان نوع القرار المستخدم فإن عملية اتخاذ القرار تتطلب المرور بالمراحل التالية:

أ. معرفة بيئة وطبيعة القرار، كمعرفة من سيتخذ القرار، ونوع القرار؛ قرار في حالة التأكد، أو قرار في حالة المخاطرة، أو قرار في حالة عدم التأكد.

ب. تحديد مقياس للفعالية (معرفة الهدف من القرار).

ت. معرفة جميع الحلول (البدائل) الممكنة.

ث. معرفة ما يسمى جدول القرار (Decision Table)، أو ما يسمى مصفوفة العوائد (Payoff Matrix) المتعلقة بالقرار. والشكل العام لجدول القرار يكون عادة كما هو مبين في الشكل (2- 1)، حيث تمثل $S_1, S_2, ... S_m$ جميع حالات الطبيعة State of Nature التي يمكن أن تقع، وتمثل $P_1, P_2, ... P_m$ احتمالات وقوع هذه الحالات، وتمثل $a_1, a_2, ... a_n$ جميع الحلول أو البدائل Alternatives الممكنة، أما r_{ij} $(i = 1, 2, ..., n; j= 1, 2, ..., m)$ فتمثل العائد الناتج عن اختيار البديل a_i عند وقوع حالة الطبيعة S_j.

الشكل (2- 1) الشكل العام لجدول القرار

الحلول الممكنة (البدائل)	حالات الطبيعة واحتمالاتها			
	P_1	P_2	...	P_m
	S_1	S_2	...	S_m
a_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1m}
a_2	r_{21}	r_{22}	:	r_{2m}
:	:	:	:	:
a_n	r_{n1}	r_{n2}	:	r_{nm}

2.2 قرارات في حالة التأكد Decisions Under Certainty

عند هذه الحالة يتوافر لصانع القرار معلومات كاملة عن البدائل وعوائدها. وتتكون مصفوفة العوائد (جدول القرار) في هذه الحالة من عمود واحد، حيث توجد حالة طبيعة واحدة مؤكدة، ويتلخص عمل صانع القرار في مقارنة جميع العوائد واختيار أفضلها وفقاً لمقياس الفعالية.

مثال (2- 1) يتوفر لدى أحد المصانع ثلاثة آلات هي: A، B، وC، تحتاج إلى صيانة، كما يتوفر ثلاثة عمال صيانة، والجدول (2- 1) يبين الوقت بالساعة الذي يستغرقه كل عامل لصيانة الآلة.

الجدول (2- 1)

المحطة / المهندس	A	B	C
عامر	6	8	5
أيمن	3	6	5
خلدون	8	10	9

إذا فرضنا أننا سنعين عاملاً واحداً لصيانة إحدى الآلات فما هو أفضل التعينات للعاملين الثلاثة على الآلات الثلاثة لكي يكون وقت الصيانة أقل ما يمكن.

الحل

لحل هذه المشكلة التي هي ضمن ظروف التأكد نستخدم إحدى طرق حل نماذج التخصيص التي سيرد شرحها معنا في الفصل السابع، وفيما يلي حل هذه المشكلة باستخدام طريقة العد الكامل. والجدول (2- 2) يعطي البدائل الستة والزمن الناتج عند كل بديل

الجدول (2- 2) بدائل القرار

البدائل	العاملين			إجمالي الزمن
	عامر	أيمن	خلدون	
1	A	B	C	6 + 6 + 9 = 21 hr
2	A	C	B	6 + 5 + 10 = 21 hr
3	B	A	C	8 + 3 + 9 = 20 hr
4	B	C	A	8 + 5 + 8 = 21 hr
5	C	A	B	5 + 3 + 10 = 18 hr
6	C	B	A	5 + 6 + 8 = 19 hr

يلاحظ من الجدول أن أفضل بديل هو البديل الخامس وهو:

- العامل عامر لإنجاز أعمال الصيانة في المحطة (C).
- العامل أيمن لإنجاز أعمال الصيانة في المحطة (A).
- العامل خلدون لإنجاز أعمال الصيانة في المحطة (B).

بحيث يكون إجمالي عدد الساعات يساوي (18) ساعة وهو أقل زمن، وتجدر الإشارة هنا بأن تحديد البديل الأفضل يعتمد على هدف الشركة إما تخفيض فيتم عندها اختيار أقل قيمة من بين البدائل، أو تعظيم فيتم اختيار أعلى قيمة من بين البدائل.

3.2 قرارات في حالة المخاطرة Decisions Under Risk

تسمى هذه القرارات بالقرارات الاحتمالية، حيث يتوافر لصانع القرار معلومات غير كافية عن حالات الطبيعة، ويعبر عن هذه المعرفة الجزئية عادة بتقدير احتمال حدوث كل حالة من حالات الطبيعة. ويستطيع صانع القرار عندئذ أن يتوقع درجة المخاطرة عند اختيار الحل الأمثل بدلالة التوزيع الاحتمالي الناتج لحالات الطبيعة بمعايير متعددة، نذكر منها:

1.3.2 معيار القيمة المالية المتوقعة Expected Monetary Value

وفقاً لهذا المعيار فإن الحل الأمثل هو الذي يعطي أفضل قيمة مالية متوقعة للعوائد طبقاً للهدف (أكبرها في حالة الأرباح، وأقلها في حالة التكاليف). ونحصل على القيمة المالية المتوقعة لبديل معين بضرب العوائد r_{ij} في الاحتمالات P_j المقابلة لها، ثم جمع الناتج. فإذا رمزنا بـ $EMV(a_i)$ للقيمة المتوقعة للبديل (a_i) فإن:

$$EMV(a_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} P_j$$

وتقاس الفعالية هنا بالقيمة المتوقعة للبديل.

مثال (2- 2) ترغب الشركة الأردنية للاستثمارات العقارية باستثمار جزء من أموالها في الإنشاءات بحيث تكون عوائد الاستثمارات خلال عام أكبر ما يمكن. توفرت للشركة ثلاث بدائل للاستثمار: الأول في المباني السكنية، والثاني في المجمعات التجارية، والثالث في المرافق السياحية. وقد دلت الدراسات الإحصائية على أن الوضع الاقتصادي في الأردن غير ثابت وأنه يكون في إحدى حالات ثلاث (حالات الطبيعة). حالة تضخم باحتمال 30٪، أو حالة ركود باحتمال 20٪، أو حالة نمو باحتمال 50٪. كما دلت هذه الدراسات أيضا على أن الأرباح المقابلة لفرص الاستثمار وحالات الطبيعة المشار إليها أمكن تقديرها كما هو مبين في الجدول (2- 3).

الجدول (2- 3) جدول قرار الشركة الأردنية للاستثمارات العقارية

البدائل	حالات الطبيعة واحتمالاتها		
	نمو	ركود	تضخم
	P_1: 0.5	P_2: 0.2	P_3: 0.3
مبنى سكني (a_1)	50000	20000	- 10000
مجمع تجاري (a_2)	80000	30000	- 20000
مرفق سياحي (a_3)	100000	25000	- 40000

المطلوب:

ايجاد أفضل البدائل وفقاً لمعيار القيمة المالية المتوقعة للعوائد.

الحل

$$EMV(a_1) = (50000)(0.5) + (20000)(0.2) + (-10000)(0.3) = 26000 \text{ Jds}$$

$$EMV(a_2) = (80000)(0.5) + (30000)(0.2) + (-20000)(0.3) = 40000 \text{ Jds}$$

$$EMV(a_3) = (100000)(0.5) + (25000)(0.2) + (-40000)(0.3) = 43000 \text{ Jds}$$

إن أفضل بديل هو الاستثمار في المرافق السياحية، لأنه يملك أكبر قيمة متوقعة للعوائد.

2.3.2 معيار الفرصة الضائعة المتوقعة
Expected Opportunity Loss (EOL)

تعرف الفرصة الضائعة لبديل معين عند حالة طبيعة معينة بأنها الخسارة النسبية الناتجة عن اختيار أفضل بديل مقابل حالة الطبيعة تلك.

ففي مثال الشركة الأردنية للاستثمارات العقارية، إذا وقعت حالة الطبيعة "نمو" فإن أفضل بديل هو (a_3) لأنه يملك أكبر عائد (100000) دينار، وبالمثل فإن البديل (a_2) هو أفضل بديل فيما لو وقعت الحالة الثانية "ركود"، والبديل (a_1) هو أفضل بديل في حال وقعت الحالة الثالثة "تضخم"، وبذلك فإن:

قيمة الفرصة الضائعة في حال اختيار (a_1) ووقوع حالة الطبيعة S_1 هي:

$$100000 - 50000 = 50000$$

قيمة الفرصة الضائعة في حال اختيار (a_1) ووقوع حالة الطبيعة S_2 هي:

$$30000 - 20000 = 10000$$

وقيمة الفرصة الضائعة في حال اختيار (a_1) ووقوع حالة الطبيعة S_3 هي:

$$- 10000 + 10000 = 0$$

ولحساب القيمة المتوقعة للفرصة الضائعة نقوم أولاً بتشكيل جدول الفرصة الضائعة من جدول القرار بالطريقة الموضحة أعلاه. فإذا رمزنا بـ l_{ij} للفرصة الضائعة الناتجة عن اختيار البديل (a_i) لدى وقوع حالة الطبيعة (S_j) فإن القيمة المتوقعة للفرصة الضائعة للبديل (a_i) تعطى بالعلاقة الأتية:

$$EOL\,(a_i) = \sum_{j=1}^{m} l_{ij} P_j$$

وأفضل البدائل وفقاً لمعيار للفرصة الضائعة المتوقعة هو ذلك الذي يملك أقل قيمة متوقعة للفرصة الضائعة. ومن الواضح هنا أن الفعالية تقاس بالقيمة المتوقعة للفرصة الضائعة.

مثال (2- 3): بالعودة إلى مثال (2- 2) ما أفضل البدائل وفقاً لمعيار للفرصة الضائعة المتوقعة؟

الحل

نقوم أولاً بتشكيل جدول الفرصة الضائعة عن طريق طرح العائد عند كل حالة طبيعية من أعلى العوائد عند نفس الحالة كما هو مبين في الجدول (2- 4).

الجدول (2- 4) جدول الفرصة الضائعة

البدائل	حالات الطبيعة واحتمالاتها		
	نمو	ركود	تضخم
	P_1: 0.5	P_2: 0.2	P_3: 0.3
(a_1)	100000 – 50000 = 50000	30000 – 20000 = 10000	-10000 – (-10000) = 0
(a_2)	100000 – 80000 = 20000	30000 – 30000 = 0	-10000 – (-20000) = 10000
(a_3)	100000 – 100000 = 0	30000 – 250000 = 5000	-10000 – (- 40000) = 30000

ومنه نجد:

$$EOL\,(a_1) = \mathbf{(50000)(0.5) + (10000)(0.2) + (0)(0.3) = 27000}$$

$$EOL\,(a_2) = \mathbf{(20000)(0.5) + (0)(0.2) + (10000)(0.3) = 13000}$$

$$EOL\,(a_3) = \mathbf{(0)(0.5) + (5000)(0.2) + (30000)(0.3) = 10000}$$

وبذلك يكون البديل **a_3** هو أفضل البدائل وفقاً لمعيار للفرصة الضائعة المتوقعة.

مثال (2- 4): قامت مؤسسة النور لنقل البضائع ببناء مصفوفة التكاليف المبينة في الجدول (2- 5)، ما هو أفضل البدائل وفقاً لمعيار للفرصة الضائعة المتوقعة؟

الجدول (2- 5) جدول قرار مؤسسة النور لنقل البضائع

البدائل	حالات الطبيعة و احتمالاتها			
	S_1	S_2	S_3	S_4
	P_1: 0.4	P_2: 0.2	P_3: 0.3	P_4: 0.1
a_1	240	150	270	360
a_2	300	180	360	360
a_3	510	240	150	450

الحل

في هذه الحالة تكون أفضل البدائل عند حالة الطبيعة $\mathbf{S_1}$ هو البديل $\mathbf{a_1}$، وعند حالة الطبيعة $\mathbf{S_2}$ البديل $\mathbf{a_1}$ وعند حالة الطبيعة $\mathbf{S_3}$ البديل $\mathbf{a_3}$، وأخيراً عند حالة الطبيعة $\mathbf{S_4}$ البديل $\mathbf{a_1}$ أو البديل $\mathbf{a_2}$. وبذلك يكون جدول الفرصة الضائعة على النحو الأتي:

الجدول (2- 6) جدول الفرصة الضائعة الخاص بمؤسسة النور لنقل البضائع

البدائل	حالات الطبيعة و احتمالاتها			
	S_1	S_2	S_3	S_4
	P_1: 0.4	P_2: 0.2	P_3: 0.3	P_4: 0.1
a_1	0	0	120	0
a_2	60	30	210	0
a_3	270	90	0	90

وبإجراء الحسابات نجد:

$$EOL(a_1) = (0)(0.4) + (0)(0.2) + (120)(0.3) + (0)(0.1) = 36$$

$$EOL(a_2) = (60)(0.4) + (30)(0.2) + (210)(0.3) + (0)(0.1) = 93$$

$$EOL(a_3) = (270)(0.4) + (90)(0.2) + (0)(0.3) + (90)(0.1) = 135$$

وبذلك يكون البديل الأول a_1 هو أفضل البدائل.

3.3.2 القيمة المتوقعة للمعلومة التامة

Expected Value of Perfect Information (EVPI)

إن لدقة الاحتمالات دوراً كبيراً في تحديد البديل الأفضل لذلك يحاول متخذ القرار الحصول على البيانات والمعلومات اللازمة لزيادة الدقة في اختيار البديل الأفضل.

وإن الحصول على البيانات والمعلومات من المصادر المختلفة يترتب عليه تكاليف إضافية لذلك ينبغي على متخذ القرار تقييم قيمة البيانات والمعلومات الإضافية بمقارنتها بالأثر الذي ستبرزه في تحسين قيمة البديل الأفضل.

ولتوضيح ذلك لنفترض أن إحدى الشركات المتخصصة في دراسات الاستثمار تقدمت بعرض لإجراء بحث عن وضع الاقتصاد في الأردن، وتقديم مشورة علمية للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية لتحديد حالة الاقتصاد بشكل مؤكد. وكانت تكلفة الحصول على هذه المشورة 20000 دينار، سيواجه متخذ القرار مشكلة تتمثل في قبول العرض أو رفضه، وفي هذه الحالة سيحتاج متخذ القرار إلى تحديد القيمة المتوقعة في ظل توفر المعلومة التامة لتحديد ما هو الحد الأقصى الذي يمكن دفعه للحصول على المعلومات.

في هذه الحالة سيبحث متخذ القرار عن القيمة المتوقعة للقرار مع وجود المعلومة التامة والتي يمكن حسابها وفق العلاقة التالي:

القيمة المتوقعة مع وجود المعلومة التامة

Expected Value with Perfect Information (EVWPI)

= (أفضل عائد في حالة الطبيعة الأول) ×

(احتمال حدوث الحالة الأولى) + (أفضل عائد في حالة الطبيعة الثانية)

× (احتمال حدوث الحالة الثانية) + ... + (أفضل عائد في حالة الطبيعة الأخيرة) ×

(احتمال حدوث الحالة الأخيرة)

إن القيمة المتوقعة للمعلومة التامة EVPI = (EVWPI) – أعلى قيمة مالية متوقعة

وبالتطبيق على مثال الشركة الأردنية للاستثمارت العقارية نحصل على مايلي:

$$\textbf{EVWPI} = (100000)(0.5) + (30000)(0.2) + (-10000)(0.3)$$
$$= 53000$$

$$\textbf{EVPI} = 53000 - 43000 = 10000$$

إذن أقصى قيمة يمكن أن يدفعها متخذ القرار للحصول على المعلومة الصحيحة هي: 10000 دينار.

4.3.2 الهيمنة في البدائل Dominance

بالرجوع إلى جدول قرار التكاليف الوارد في مثال (2- 4) أعلاه نجد أن التكاليف المقابلة للبديل الأول a_1 عند كل حالة من حالات الطبيعة أقل من أو تساوي مقابلاتها بالنسبة للبديل الثاني a_2. عند هذه الحالة نقول بأن البديل a_1 مهيمن على البديل a_2 ويمكن عندئذ إهمال البديل a_2 وحساب القيمة المتوقعة للعوائد أو القيمة المتوقعة للفرصة الضائعة للبديلين a_1 وa_3 فقط ومن ثم اختيار أفضلها.

5.3.2 معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعاً

يعتمد هذا المعيار على اختيار حالة الطبيعة الأكثر احتمالاً فقط وإهمال غيرها من الحالات. وأفضل البدائل عندئذ هو البديل الذي يقابل أفضل العوائد عند حالة الطبيعة الأكبر احتمالاً. ولتوضيح ذلك نعود إلى مثال (2- 3) الخاص بالشركة

الأردنية للاستثمارات العقارية، نجد بأن حالة الطبيعة الأكثر وقوعاً هي S_1 لأنها تمتلك أكبر احتمال، وأفضل البدائل وفقاً لهذا المعيار هو البديل a_1 لأن له أكبر عائد ربحي.

<u>77 ملاحظة</u>

4.2 قرارات في حالة عدم التأكد Decisions Under Uncertainty

يشترط لمثل هذا النوع من القرارات معرفة صانع القرار بجميع حالات الطبيعة الممكنة، إلا أنه لا يعرف أي شيء عن احتمالات حدوثها كما هي الحال بالنسبة للظواهر الحديثة أو تلك التي تقع بشكل مفاجئ، ولا يوجد لمثل هذه الحالات معيار واحد يتم بموجبه اختيار أفضل البدائل بل عدة معايير كل له تبريراته الخاصة به، ومن هذه المعايير:

1. معيار التفاؤل Maximax Criterion (Optimistic Approach)
2. معيار التشاؤم Maximin Criterion (Conservative Approach)
3. معيار الواقعية (هورويز) Criterion of Realism (Hurwicz Criterion)
4. معيار الاحتمالية المتساوية (لابلاس)
Equally Likely Criterion (LaPlace)
5. معيار الندم Minimax Regret

ولتوضيح آلية عمل هذه المعايير سوف نعتمد على مثال الشركة الأردنية للاستثمارات العقارية (مثال (2- 2)).

1.4.2 معيار التفاؤل
Maximax Criterion (Optimistic Approach)

مستخدم هذا المعيار متفائل لأنه يفترض أن الأفضل هو الذي سيحدث ولذلك فإنه يختار أفضل العوائد المقابلة لكل بديل، فيحصل على عمود نتائج مقابل للبدائل المختلفة، ومن ثم يتم اختيار أفضل نتيجة من هذا العمود طبقاً للهدف. فعندما تكون

مصفوفة العوائد تمثل أرباح نقوم أولاً باختيار أعلى عائد مقابل كل بديل ومن الناتج نختار أكبر قيمة. أما عندما تكون مصفوفة العوائد تمثل تكاليف نقوم أولاً باختيار أقل العوائد المقابلة لكل بديل ومن الناتج نختار أقل نتيجة.

مثال (2- 5) بالعودة إلى مثال شركة الأردنية للاستثمارات العقارية (مثال (2- 2)) المبين في الجدول (2- 7)،

الجدول (2- 7) قرار التفاؤل للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية

الأعلى عند كل بديل	حالات الطبيعة			البدائل
	تضخم	ركود	نمو	
50000	- 10000	20000	50000	مبنى سكني (a_1)
80000	- 20000	30000	80000	مجمع تجاري (a_2)
100000 maximax	- 40000	25000	100000	مرفق سياحي (a_3)

من الجدول (2- 7) نلاحظ بأن أفضل البدائل وفقاً لمعيار التفاؤل هو البديل a_3 لأنه يمتلك أعلى العوائد في العمود الناتج.

2.4.2 معيار التشاؤم

Maximin Criterion (Conservative Approach)

مستخدم هذا المعيار متشائم لأنه يفترض أن الأسوأ هو الذي سيحدث ولذلك فإنه يختار أسوأ العوائد المقابلة لكل بديل، فيحصل على عمود نتائج مقابل للبدائل المختلفة، ومن ثم يتم اختيار أفضل نتيجة من هذا العمود طبقاً للهدف. فعندما تكون مصفوفة العوائد تمثل أرباح نقوم أولاً باختيار أقل عائد مقابل كل بديل ومن الناتج نختار أكبر قيمة. أما عندما تكون مصفوفة العوائد تمثل تكاليف نقوم أولاً باختيار أكبر التكاليف المقابلة لكل بديل ومن الناتج نختار أقل نتيجة.

مثال (2- 6) بالعودة إلى مثال شركة الأردنية للاستثمارات العقارية (مثال (2- 2)) المبين في الجدول (2- 8).

الجدول (2- 8) قرار التشاؤم للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية

البدائل	حالات الطبيعة			الأقل عند كل بديل
	نمو	ركود	تضخم	
مبنى سكني (a_1)	50000	20000	- 10000	- 10000 maximin
مجمع تجاري (a_2)	80000	30000	- 20000	- 20000
مرفق سياحي (a_3)	100000	25000	- 40000	- 40000

من الجدول (2- 8) نلاحظ بأن أفضل البدائل وفقاً لمعيار التشاؤم هو البديل **a_1** لأنه يمتلك لأفضل العوائد في العمود الناتج.

ملاحظة: الإشارة السالبة تشير إلى خسارة وبالتالي فإن أعلى قيمة سالبة تمثل أقل خسارة ممكنة ❖❖

3.4.2 معيار الواقعية (هورويز)

Criterion of Realism (Hurwicz Criterion)

إن مستخدم هذا المعيار (أحياناً يدعى معيار الوسط الموزون Weighted average) لا يعد متفائلاً على الإطلاق ولا متشائماً على الإطلاق كما هو الحال في المعيارين السابقين، إنما يفترض وجود نسبة أو احتمال للتفاؤل تسمى معامل الواقعية coefficient of realism (α). قيمة هذا المعامل تقع بين صفر وواحد، فعندما تقترب قيمة المعامل ألفا (α) من الواحد صحيح يكون صانع القرار متفائل، وعندما تقترب من الصفر يكون صانع القرار متشائم حول المستقبل. إن ميزة هذا المعيار أنه يسمح لصانع القرار ببناء نتائج شخصية حول نسبية التفاؤل والتشاؤم. وفي هذه الحالة فإن قيمة البديل (a_i) والتي سنرمز لها بالرمز $V(a_i)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$V(a_i) = \alpha(\text{maximum in row i}) + (1-\alpha)(\text{minimum in row i})$$

Maximum in row: أفضل قيمة للعوائد في الصف i.

Minimum in row: أسوأ قيمة للعوائد في الصف i.

$1 - \alpha$: نسبة أو احتمال التشاؤم.

يتم اختيار أفضل أو (أسوأ) قيمة للعوائد في الصف طبقاً للهدف، أكبرها أو (أقلها) في حالة الأرباح، وأقلها أو (أكبرها) في حالة التكاليف.

لاحظ أنه عندما تكون قيمة معامل الواقعية ألفا (α) تساوي واحد صحيح، تكون النتيجة نفس نتيجة معيار التفاؤل، وعندما تكون قيمة معامل الواقعية ألفا (α) تساوي صفر، تكون النتيجة نفس نتيجة معيار التشاؤم.

مثال (2- 7) افترض بأن الشركة الأردنية للاستثمارت العقارية وضعت معامل الواقعية ألفا (α) يساوي (0.8)، ما هو أفضل قرار؟

الحل

نجد أولاً قيمة الواقعية (الوسط الموزون) عند كل بديل، وعلى النحو الأتي:

$$V(a_1) = (0.8)(50000) + (0.2)(-10000) = 38000$$

$$V(a_2) = (0.8)(80000) + (0.2)(-20000) = 68000$$

$$V(a_3) = (0.8)(100000) + (0.2)(-40000) = 72000$$

والعمود الأخير في الجدول (2- 9) يلخص النتائج، ويكون أفضل بديل هو البديل **a_3** (الاستثمار في المرافق السياحية) لأن له أعلى وسط موزون.

الجدول (2- 9) قرار الواقعية للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية

البدائل	حالات الطبيعة			$V(a_i)$
	نمو	ركود	تضخم	
مبنى سكني (a_1)	50000	20000	- 10000	38000
مجمع تجاري (a_2)	80000	30000	- 20000	68000
مرفق سياحي (a_3)	100000	25000	- 40000	72000 Realisim

4.4.2 معيار الاحتمالية المتساوية (لابلاس)

Equally Likely Criterion (LaPlace)

يفترض هذا المعيار أن جميع حالات الطبيعة لها نفس احتمال الوقوع. وعندها تقاس الفعالية بالقيمة المتوقعة للبدائل. ولذلك يكون أفضل البدائل هو أعلاها بالقيمة المتوقعة طبقاً للهدف. ونستطيع ايجاد القيمة المتوقعة عند كل بديل عن طريق حساب متوسط العوائد (مجموع العوائد على عددها) عند كل بديل، ويتم اختيار البديل الذي له أعلى متوسط.

مثال (2- 8) ما هو أفضل البدائل الاستثمارية للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية وفقاً لمعيار الاحتمالية المتساوية؟

الحل

يتم أولاً حساب متوسط العوائد عند كل بديل، ثم نختار البديل صاحب أعلى متوسط، وبناء على ذلك يكون البديل a_2 (الاستثمار في المجمعات التجارية) هو البدي الأفضل لأن له أعلى متوسط (قيمة متوقعة)، كما هو مبين في الجدول (2- 10).

الجدول (2- 10) قرار الاحتمالية المتساوية للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية

المتوسط	حالات الطبيعة			البدائل
	تضخم	ركود	نمو	
20000	- 10000	20000	50000	مبنى سكني (a_1)
30000 Laplace	- 20000	30000	80000	مجمع تجاري (a_2)
28333.33	- 40000	25000	100000	مرفق سياحي (a_3)

5.4.2 معيار الندم Minimax Regret

ويسمى أيضا معيار سافيج Savage Criterion، حيث يتم أولاً تطوير ما يسمى بجدول الفرصة الضائعة (جدول الندم) كما مر معنا ثم نطبق معيار أقل الأكبر، ويكون أفضل البدائل هو البديل صاحب أقل ندم، أي أننا نختار أفضل الأسوأ.

مثال (2- 9) ما هو أفضل البدائل الاستثمارية للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية وفقاً لمعيار الندم؟

الحل

إن الجدول (2- 3) أعلاه يبين مصفوفة الندم المتعلقة بقرار الشركة الأردنية للاستثمارات العقارية، والعمود الأخير من الجدول (2- 11) يبين لنا قيمة الندم عند كل بديل.

الجدول (2- 11) قرار الندم للشركة الأردنية للاستثمارات العقارية

البدائل	حالات الطبيعة			الندم
	نمو	ركود	تضخم	
مبنى سكني (a_1)	50000	10000	0	50000
مجمع تجاري (a_2)	20000	0	10000	20000 Minimax
مرفق سياحي (a_3)	0	5000	30000	30000

من الجدول (2- 11) نلاحظ بأن أفضل البدائل وفقاً لمعيار الندم هو البديل a_2 لأنه يمتلك لأقل قيم الندم في العمود الناتج.

5.2 شجرة القرار Decision Tree

تعتبر شجرة القرار أداة تساعد في عرض وتحليل أي مشكلة قرار في ظل المخاطرة. وتعرّف بأنها تمثيل بياني للعناصر المرتبطة بمشكلة القرار والعلاقة التي ترتبط بينها. وتتضمن شجرة القرار مجموعة من الرموز يمكن توضيحها على النحو الأتي:

أ: عقدة قرار. O: عقدة حالات طبيعة. —: بدائل القرار وحالات الطبيعة

تكمن أهمية شجرة القرار في حالة القرارات ذات المراحل المتعددة التي يصعب عرضها وتحليلها بمصفوفة عوائد، على سبيل المثال الدخول إلى سوق جديدة، هل سنعتمد في اتخاذه على إدارة التسويق، أم على خبرة إدارة المبيعات، أم على دراسات السوق، وفي أي حالة من الأحوال ستكون أما متخذ القرار بديلين أن يدخل إلى سوق جديدة أو لا يدخل إلى سوق جديدة.. وهكذا فإن متخذ الفرار سيكون أمام سلسلة متعاقبة من اختيار البدائل، وتتمكن شجرة القرار من عرض البدائل المختلفة وتحليلها واستخراج البديل الأفضل باستخدام ما يسمى المرور التراجعي، أي تقييم البدائل باستخدام معيار القيمة المالية المتوقعة من نهاية الشجرة وصولاً إلى عقدة القرار في بداية الشجرة، وأثناء التراجع يتم إسقاط البديل الذي لا يمتلك فرصة من المنافسة في المرحلة اللاحقة ووضع علامة على مساره لتمييزه عن البدائل التي تمتلك فرصة للمنافسة.

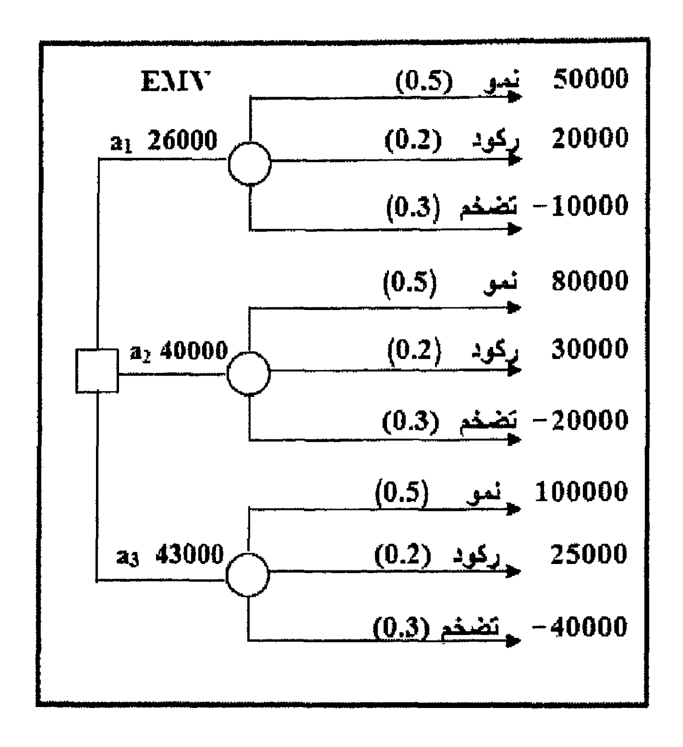
لعرض أو تمثيل أي مشكلة قرار باستخدام أسلوب شجرة القرار يمكن إتباع ما يلي:

1. تحديد عقد كل قرار والبدائل المتاحة عند كل عقدة.
2. تحديد عقد حالات الطبيعة.
3. تحديد العوائد واحتمالات حالت الطبيعة المرتبطة بكل بديل بالمسار الذي ترتبط به في شجرة القرار.

ولتوضيح كيفية استخدام شجرة القرار نأخذ مثال الشركة الأردنية لاستثمارات العقارية. لاحظ الشكل (2- 2) الذي يمثل شجرة قرار المؤسسة الأردنية للاستثمارات العقارية

حيث ننطلق من عقدة قرار Decision Node (المربع)، وينطلق من عقدة القرار جميع البدائل المتوفرة مقابل تلك العقدة [البدائل: a_1، a_2، وa_3]، وفي نهاية كل بديل نواجه عقدة حالات طبيعة state of nature node، وينطلق من كل عقدة حالة طبيعة أسهم تشير إلى ما يمكن أن يقع من حالات طبيعة بعد هذه العقدة، ونكتب على هذه الأسهم نوع الحالة واحتمالية حدوثها. وعندما يكون السهم الدال على حالة طبيعة هو سهم نهائي (أي أنه لا يتفرع عنه أي عقد حالات طبيعة أو قرار) فإننا نكتب في نهاية ذلك السهم العائد المتوقع عند تلك حالة الطبيعة كما هو مبين في الشكل (2- 1). أم طريقة استخدام شجرة القرار لحل المشكلة المدروسة فتتم بحساب القيمة المتوقعة EMV عند كل عقدة لكل بديل حيث يتم استبقاء البديل الأمثل وشطب الباقي برمز معين كالرمز \\ مثلاً.

الشكل (2- 2) شجرة قرار الشركة الأردنية للاستثمارات العقارية



تعد شجرة القرار المبينة في الشكل (2- 2) من أبسط أنواع شجرة القرار. إذ أن أهم فوائد شجرة القرار هو استخدامها من أجل تبسيط عمليات اتخاذ القرار المتعلقة بعدة أهداف مترابطة مثل تلك المتعلقة بفترات زمنية متعاقبة يعتمد كل منها على ما قبله حيث يتم بناء شجرة القرار بالطريقة نفسها الموضحة أعلاه بعد تجزئتها إلى شجرات قرار بسيطة.

6.2 تمارين محلولة

السفير هي شركة صغيرة تختص بتوريد المواد الكيميائية الخاصة بتحميض الأفلام الفوتوغرافية، ومن أبرز ما تورده هذه الشركة هو المادة "BC-6"، حيث يقوم السيد عدي أحمد – مدير الشركة – عادةً بتخزين: 100، 200، أو 300 عبوة من المادة "BC-6" كل أسبوع. تحقق كل عبوة يبيعها السيد عدي أحمد ربح مقداره (30) دينار للعبوة الواحدة. تعد المادة "BC-6" من المواد التي فترة صلاحيتها قصيرة جداً وفي حالة عدم بيعها في نهاية الأسبوع يقوم السيد ليث عدنان بالتخلص منها، ولأن تكلفة العبوة الواحدة من المادة "BC-6" تساوي (20) دينار، ستخسر الشركة (20) دينار في كل عبوة لا تباع في نهاية الأسبوع.

المطلوب:

1. بناء جدول القرار المناسب لهذه المشكلة.
2. ما هو أفضل البدائل وفقاً للمعايير التالية:
   - معيار التفاؤل.
   - معيار التشاؤم.
   - معيار الندم.
   - معيار الاحتمالية المتساوية (لابلاس).
   - معيار الواقعية، عند ألفا (α) تساوي (0.7).
   - معيار القيمة المالية المتوقعة للعوائد EMV إذا كان هنالك احتمالية (45٪) بأن يباع (100) عبوة في نهاية الأسبوع، و(35٪) بأن يباع (200) عبوة، و(20٪) بأن يباع (300) عبوة.
   - معيار القيمة المتوقعة للفرصة الضائعة بافتراض نفس الاحتمالات الواردة في بند(7)
3. تطوير شجرة القرار المناسبة للمشكلة.

الحل

1. بناء جدول القرار

يتكون جدول القرار من ثلاثة بدائل وثلاثة حالات طبيعة، البدائل هي: إنتاج 100 عبوة، إنتاج 200 عبوة، أو إنتاج 300 عبوة، أما حالات الطبيعة فتمثل مقدار الطلب المتوقع على المنتج إما أن يكون 100 عبوة، أو 200 عبوة، أو 300 عبوة.

أما العوائد فتمثل الربح المتحقق عند كل بديل مقابل لكل حالة طبيعة. الربح المتحقق عند البديل الأول (إنتاج 100 عبوة) مقابل حالة الطلب الأولى (100 عبوة) فيساوي عدد العبوات المطلوبة مضروباً في الربح، فيكون الربح = 100 × 30 = 3000 دينار، وعند حالة الطلب الثانية (200 عبوة) فإن الربح يبقى 3000 دينار لأن البديل الأول يمثل إنتاج فقط (100 عبوة) وبالتالي فإن الشركة لن تبيع إلا العبوات المنتجة، وهكذا عند حالة الطلب الثالثة.

الربح المتحقق عند البديل الثاني (إنتاج 200 عبوة) مقابل حالة الطلب الأولى (100 عبوة) فيساوي عدد العبوات المطلوبة مضروباً في الربح، فيكون الربح = 100 × 30 = 3000 دينار، ولكن هنالك فائض مقداره 100 عبوة (200 عبوة منتجة – 100 عبوة مطلوبة) تكلف الشركة 2000 دينار (100 فائض × 20 تكلفة إنتاج العبوة الواحدة)، وعليه يكون الربح الصافي المتحقق عند البديل الثاني مقابل الحالة الأولى يساوي 1000 دينار (3000 دينار – 2000 دينار)، وعند حالة الطلب الثانية (200 عبوة) فإن الربح يكون 6000 دينار(200 عبوة × 30 دينار)، لأن البديل الثاني يمثل إنتاج فقط (200 عبوة) فإن الربح يبقى 6000 دينار عند حالة الطلب الثالثة.

الربح المتحقق عند البديل الثالث (إنتاج 300 عبوة) مقابل حالة الطلب الأولى (100 عبوة) فيساوي عدد العبوات المطلوبة مضروباً في الربح، فيكون الربح = 100 × 30 = 3000 دينار، ولكن هنالك فائض مقداره 200 عبوة (300 عبوة منتجة – 100 عبوة مطلوبة) تكلف الشركة 4000 دينار (200 فائض × 20 تكلفة إنتاج العبوة الواحدة)، وعليه يكون عند البديل الثالث مقابل الحالة الأولى خسارة مقدارها 1000

دينار (3000 دينار – 4000 دينار)، وعند حالة الطلب الثانية (200 عبوة) فإن الربح يكون 6000 دينار(200 عبوة × 30 دينار)، ولكن هنالك فائض مقداره 100 عبوة (300 عبوة منتجة – 200 عبوة مطلوبة) تكلف الشركة 2000 دينار (100 فائض × 20 تكلفة إنتاج العبوة الواحدة)، وعليه يكون الربح الصافي المتحقق عند البديل الثالث مقابل الحالة الثانية يساوي 4000 دينار (6000 دينار – 2000 دينار)، لأن البديل الثالث يمثل إنتاج فقط (300 عبوة) فإن الربح عند حالة الطلب الثالثة يكون 9000 دينار.

مما سبق نستطيع تكوين جدول القرار على النحو الأتي:

جدول قرار شركة السفير

البدائل (العرض)	حالات الطبيعة (الطلب) 100	200	300
100 عبوة	3000	3000	3000
200 عبوة	1000	6000	6000
300 عبوة	- 1000	4000	9000

2. القرار الأفضل وفقاً لمعيار التفاؤل هو البديل الثالث (إنتاج 300 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

البدائل (العرض)	حالات الطبيعة (الطلب) 100 عبوة	200 عبوة	300 عبوة	الأفضل
100 عبوة	3000	3000	3000	3000
200 عبوة	1000	6000	6000	6000
300 عبوة	- 1000	4000	9000	9000 Maximax

3. القرار الأفضل وفقا لمعيار التشاؤم هو البديل الأول (إنتاج 100 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

الأسوأ	حالات الطبيعة (الطلب)			البدائل (العرض)
	300 عبوة	200 عبوة	100 عبوة	
3000 Maximin	3000	3000	3000	100 عبوة
1000	6000	6000	1000	200 عبوة
- 1000	9000	4000	- 1000	300 عبوة

4. القرار الأفضل وفقاً لمعيار الندم هو البديل الثاني (إنتاج 200 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

الندم	حالات الطبيعة (الطلب)			البدائل (العرض)
	300 عبوة	200 عبوة	100 عبوة	
6000	6000	3000	0	100 عبوة
3000 minimax	3000	0	2000	200 عبوة
4000	0	2000	4000	300 عبوة

5. القرار الأفضل وفقاً لمعيار الاحتمالية المتساوية هو البديل الثاني (إنتاج 200 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

المتوسط	حالات الطبيعة (الطلب)			البدائل (العرض)
	300 عبوة	200 عبوة	100 عبوة	
3000	3000	3000	3000	100 عبوة
4333.33 Laplace	6000	6000	1000	200 عبوة
4000	9000	4000	- 1000	300 عبوة

6. القرار الأفضل وفقاً لمعيار الواقعية هو البديل الثالث (إنتاج 300 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

البدائل (العرض)	حالات الطبيعة (الطلب)			الواقعية (0.7 = α)
	100 عبوة	200 عبوة	300 عبوة	
100 عبوة	3000	3000	3000	3000
200 عبوة	1000	6000	6000	4500
300 عبوة	- 1000	4000	9000	6000 Realism

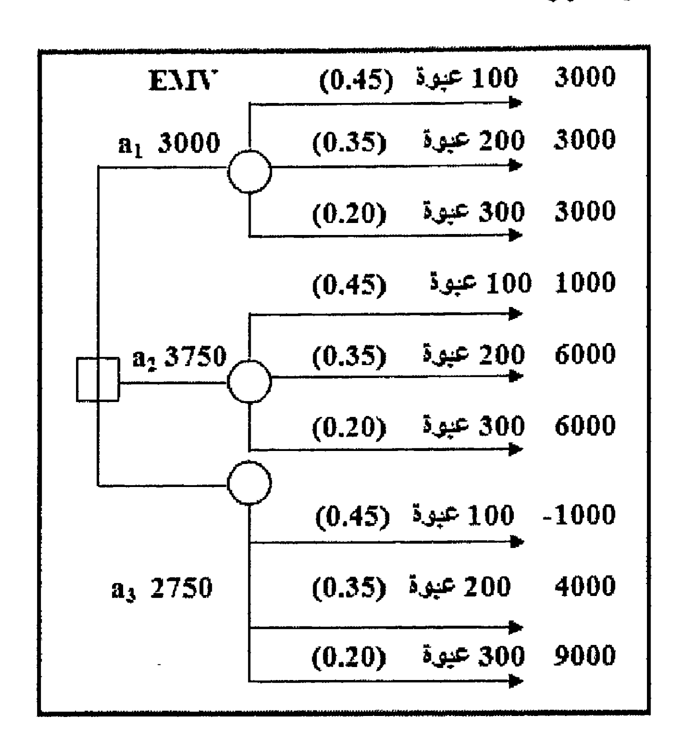
7. القرار الأفضل وفقاً لمعيار القيمة المالية المتوقعة هو البديل الثاني (إنتاج 200 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

البدائل (العرض)	حالات الطبيعة واحتمالاتها			القيمة المتوقعة EMV
	P1= 0.45	P2= 0.35	P3= 0.20	
	100 عبوة	200 عبوة	300 عبوة	
100 عبوة	3000	3000	3000	3000
200 عبوة	1000	6000	6000	3750
300عبوة	- 1000	4000	9000	2750

8. القرار الأفضل وفقاً لمعيار الفرصة الضائعة المتوقعة هو البديل الثاني (إنتاج 200 عبوة)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

البدائل (العرض)	حالات الطبيعة واحتمالاتها			الفرصة الضائعة المتوقعة
	P1= 0.45	P2= 0.35	P3= 0.20	
	100 عبوة	200 عبوة	300 عبوة	
100 عبوة	0	3000	6000	2250
200 عبوة	2000	0	3000	1500
300 عبوة	4000	2000	0	2500

9. شجرة القرار



7.2 أسئلة للمناقشة والمراجعة

1. ما المقصود بجدول القرار، وحالات الطبيعة؟
2. بين الفرق بين معيار التفاؤل ومعيار الندم.
3. وضح مفهوم الندم؟
4. لماذا يعتبر معيار الواقعية حالة وسطية بين معياري التفاؤل والتشاؤم؟
5. ما الفرق بين معيار الفرصة الضائعة ومعيار القيمة المتوقعة؟
6. متى تكون شجرة القرار أفضل من جدول القرار من حيث تحليل القرار؟

8.2 تمارين الفصل الثاني

1. يمتلك أحد المزارعين مبلغاً من المال ويفكر في استثماره إما بضمان مزيد من الأراضي الزراعية أو الاستثمار في شراء شهادات الإيداع من أحد البنوك الوطنية. إذا كانت أحوال الطقس في العام القادم جيدة سيحصل المزارع على ناتج ممتاز، أما إذا كانت أحوال الطقس في العام القادم سيئة سيخسر المزارع ماله. أما الاستثمار في شهادات الإيداع سيحقق نفس العائد بغض النظر عن أحوال الطقس. الجدول التالي يبين العائد المتوقع بالدينار لكل قرار مقابل كل حالة من أحول الطقس.

القرار	أحوال الطقس	
	جيد	سيئ
ضمان أرض زراعية	120000	- 50000
شراء شهادات إيداع	60000	60000

اختر القرار الأفضل بناءاً على معيار التشاؤم maximin، ومعيار التفاؤل maximax.

2. عدي أحمد طالب في قسم إدارة الأعمال يحاول أن يقرر أي المساقات الإجبارية سيسجلها في الفصل الدراسي القادم: تحليل كمي1 ، نظم معلومات إدارية ، أو إدارة العمليات. جهاد بني هاني، فايز النجار، ومؤيد الفضل هم الذين يدرسون تلك المساقات. عدي لا يعرف من سيقوم بتدريس كل مساق لكن يستطيع توقع علامة المساق اعتماداً على من سيدرس المساق في الفصل القادم. كما هو مبين في الجدول الأتي:

المساق	الأستاذ		
	د. بني هاني	د. النجار	د. الفضل
تحليل كمي1	75	60	85
نظم معلومات إدارية	70	80	40
إدارة العمليات	40	90	70

اختر القرار الأفضل بناءاً على معيار التشاؤم maximin، ومعيار التفاؤل maximax.

3. بناء على البيانات التي تم جمعها من السوق عن الاقتصاد الأردني قام المستثمر "محمد عدنان" بتطوير جدول القرار التالي:

	S1	S2	S3	S4
D1	20000	7000	1000	200
D2	22000	4000	2000	100
D3	5000	5000	3000	800
D4	10000	5000	2000	500

المطلوب:

أ- ما هو القرار الذي توصي به المستثمر بناء على المعايير التالية:

1. معيار التفاؤل Maximax
2. معيار الندم Minimax

3. معيار التشلؤم Maximin

4. معيار الواقعية (α = 0.8)

5. معيار القيمة المالية المتوقعة EMV في ظل تساوي احتمالات أوضاع الاقتصاد.

6. معيار الفرصة الضائعة المتوقعة EOL في ظل تساوي احتمالات أوضاع الاقتصاد.

4. بناء على البيانات التي تم جمعها من السوق عن الاقتصاد الأردني قام المستثمر "ابراهيم جهاد" بتطوير جدول القرار التالي، والخاص بالأرباح المحققة من المشاريع المبينة في الجدول:

المشروع	حالات الاقتصاد			
	ازدهار	نمو	استقرار	ركود
مبنى تجاري	40000	14000	12000	8000
مبنى سياحي	36000	20000	15000	9000
مبنى سكني	24000	16000	18000	10000

يتوقع المستثمر ابراهيم بأن يكون وضع الاقتصاد في الأردن في حالة النمو، أعلى منها في الحالات الاقتصادية الأخرى بنسبة (20٪).

المطلوب:

أ- ما هو القرار الذي توصي به المستثمر بناء على المعايير التالية:

1. معيار التفاؤل Maximax

2. معيار الندم Minimax

3. معيار التشلؤم Maximin

4. معيار الواقعية (α = 0.7)

5. معيار القيمة المالية المتوقعة EMV

6. معيار الاحتمالية المتساوية Laplace.

5. يرغب مالك الشركة العربية الأردنية للأعمال الإنشائية في اتخاذ قرار يتعلق ببناء شقق فندقية، أو بناء مركز تجاري، أو تأجير جميع معدات الشركة للشركات الأخرى. الربح الناتج من كل بديل سيتحدد عن طريق تكلفة المواد الأولية من حيث درجة استقرارها أو درجة زيادتها. الربح المتحقق عند كل بديل مقابل حالة تكاليف المواد مبين في جدول القرار التالي:

القرار	تكلفة المواد الأولية	
	زيادة	استقرار
شقق فندقية	70000	30000
مركز تجاري	105000	20000
تأجير	40000	40000

المطلوب:

أ- ما هو القرار الذي توصي به المستثمر بناء على المعايير التالية:

1. معيار التفاؤل Maximax
2. معيار الندم Minimax
3. معيار التشلؤم Maximin
4. معيار الواقعية ($\alpha = 0.4$)
5. معيار الاحتمالية المتساوية Laplace.

6. كان جدول التكاليف الخاص بإحدى الشركات الوطنية على النحو الأتي:

البدائل	حالات الطبيعة			
	S1	S2	S3	S4
A	15	24	9	3
B	21	12	15	6
C	9	18	18	12

أوجد أفضل البدائل وفقاً للمعايير التالية:

1. معيار التفاؤل.
2. معيار التشاؤم.
3. معيار الندم.
4. معيار الاحتمالية المتساوية (لابلاس).
5. معيار الواقعية، عند ألفا (α) تساوي (0.6).

7. إذا أعطيت مصفوفة العوائد التالية:

	S1	S2	S3
A	200	1000	500
B	- 100	800	1200
C	600	600	600

أ. ما هو القرار الأفضل من وجهة نظر المدير المتفائل؟

ب. ما هو القرار الأفضل من وجهة نظر المدير المتشائم؟

ج. إذا كانت احتمالات حالات الطبيعة الثلاث هي: 0.3، 0.3، و0.4، على التوالي، ما هو القرار الأفضل وفقاً لمعيار القيمة المتوقعة.؟

د. ما هي القيمة المتوقعة للمعلومة التامة

8. يقوم مصنع اربد لإنتاج المواد الغذائية بإنتاج صناديق تستخدم لحفظ المواد الغذائية القابلة للتلف. كل صندوق يحتوي على مجموعة من الخضار المشكلة. تكلفة الصندوق الواحد خمسة دنانير ويباع بخمسة عشر ديناراً. الصناديق التي لا تباع في نهاية كل يوم يتم بيعها لإحدى الشركات الكبرى بسعر ثلاثة دنانير للصندوق الواحد. احتمالية أن يكون الطلب 100 صندوق في اليوم هي: 30٪، و احتمالية أن يكون الطلب 200 صندوق في اليوم هي: 40٪، و احتمالية أن يكون الطلب 300 صندوق في

اليوم هي: 30٪. يتبع المصنع سياسة تتضمن إشباع طلبات جميع الزبائن، ففي حالة حدوث عجز يلجأ المصنع إلى المصانع المنافسة لسد العجز، وهذا يكلف المصنع 16 دينار عن كل صندوق.

المطلوب:

أ. بناء جدول القرار المناسب.

ب. بماذا تنصح المصنع.

9. يفتخر السيد عدنان دائماً بقدرته على جني المكاسب من استثماراته في السوق المالي، وأبدى الرغبة بالاستثمار في سوق الأسهم. في بعض الأحيان يكون من الأفضل له أن يضع أمواله في أحد البنوك الوطنية. خلال السنة القادمة عدنان يجب أن يتخذ قرار يتعلق باستثمار 10000 دينار في سوق الأسهم، أو في شهادات الإيداع بعائد مقداره 9٪. يعتمد العائد من الأسهم على حالة السوق، ففي حال كان السوق جيد يتوقع عدنان أن يكون العائد 14٪، و8٪ في حال كان السوق مستقر، و0٪ في حال كان وضع السوق سيء. قدر السيد عدنان أن احتمالية أن يكون السوق جيد بـ 0.4، واحتمالية استقرار السوق 0.4، واحتمالية أن يكون السوق سيء 0.2، ويرغب في رفع معدل العائد.

المطلوب:

ت. بناء جدول القرار المناسب.

ث. بماذا تنصح المصنع.

10. ترغب الشركة الأردنية للصناعات النسيجية في زيادة طاقتها الإنتاجية لمقابلة الطلب المتزايد على منتجاتها. بناء خط إنتاج جديد سيكلف 500000 دينار، بينما تطوير الخط الحالي سيكلف 200000 دينار. إذا كان الطلب عال في المستقبل، فإن بناء خط جديد سيحقق عائد مقداره 800000 دينار، ولكن إذا الطلب منخفض

ستكون هنالك خسارة مقدارها 500000 دينار. إذا الطلب عال سيحقق تطوير الخط الحالي عائد مقداره 200000 دينار، وإذا كان الطلب منخفض ستكون هنالك خسارة مقدارها 100000 دينار. يتوفر لدى الشركة بديل آخر يتمثل في عدم التوسع. عند أي احتمالية للطلب العال سوف يكون ب/كان الشركة اختيار أحد بديلي التوسع.

أسئلة الاختيار من متعدد Multiple Choice Questions

1. **ترجع القيم المشروطة Conditional Values في نظرية القرارات إلى:**

أ. بدائل القرارAlternatives .

ب. حالات الطبيعة States of Nature.

ج. العوائد Payoffs.

د. القيمة المالية المتوقعة Expected Monetary Value.

2. **معيار التشاؤم في عملية صنع القرار هو:**

أ. القيمة المالية المتوقعة Expected Monetary Value.

ب. الاحتمالية المتساوية Equally Likely.

ج. أدنى الأعلى Minimax.

د. أعلى الأدنى Maximin.

3. **أي من معايير اتخاذ القرار التالية لا يستخدم في حالات عدم التأكد.**

أ. أعلى الأعلى Maximax

ب. الاحتمالية المتساوية Equally Likely.

ج. أدنى الأعلى Minimax.

د. الندم Maximin.

4. افترض أن العوائد المتوقعة من ثلاثة بدائل للقرار كانت على النحو التالي: البديل الأول (3345)، البديل الثاني (3323)، البديل الثالث: (3356)، بناء على معيار القرار المستخدم، ما هو البديل الذي ستختاره؟

أ. البديل الأول.

ب. البديل الثاني.

ج. البديل الثالث.

د. عندما تكون النتائج متقاربة، لا يفضل اتخاذ القرار، وإنما استخدام معيار جديد.

5. القرار الجيد هو:

أ. القرار الذي ليس بالضرورة أن يعطي النتائج النهائية.

ب. القرار الذي لا يعتمد على النتائج الكمية المناسبة.

ج. القرار الذي لا يأخذ بالاعتبار جميع البدائل.

د. القرار الذي لا يبنى على جميع المعلومات المناسبة.

6. جوهرة السفير هي شركة صغيرة تختص بتوريد المواد الكيميائية الخاصة بتحميض الأفلام الفوتوغرافية، ومن أبرز ما تورده هذه الشركة هو المادة "BC-6"، حيث يقوم السيد ليث عدنان – مدير الشركة – عادةً بتخزين: 8، 9، 10، أو 11 عبوة من المادة "BC-6" كل أسبوع. تحقق كل عبوة يبيعها السيد ليث عدنان ربح مقداره (7) دينار للعبوة الواحدة. تعد المادة "BC-6" من المواد التي فترة صلاحيتها قصيرة جداً وفي حالة عدم بيعها في نهاية الأسبوع يقوم السيد ليث عدنان بالتخلص منها، ولأن تكلفة العبوة الواحدة من المادة "BC-6" تساوي (4) دنانير، ستخسر الشركة (4) دنانير في كل عبوة لا تباع في نهاية الأسبوع. هنالك احتمالية (20٪) بأن يباع (8) عبوة في نهاية الأسبوع، و(30٪) بأن يباع (9) عبوة، و(40٪) بأن يباع (10) عبوة، و(10٪) بأن يباع (11) عبوة. إذا كنت ترغب في تعظيم الربح المتوقع ما هو عدد العبوات التي يجب إنتاجها؟

أ. 8 عبوات.

ب. 9 عبوات.

ج. 10 عبوات.

د. 11 عبوة.

7. الجدول التالي يبين مصفوفة العوائد **payoff table** الخاصة بأرباح إحدى الشركات

	States of Nature		
البدائل	A	B	C
البديل1	120	140	120
لبديل2	200	100	50
البديل3	100	120	180
عمل لا شيء	0	0	0

إذا كان صانع القرار متفائل أي البدائل سيختار:

أ. البديل الأول.

ب. البديل الثاني.

ج. البديل الثالث.

د. عمل لا شيء.

8. **اعتمادا على بيانات جدول القرار في الفقرة (7)، إذا كان صانع القرار متشائم أي البدائل سيختار:**

أ. البديل الأول.

ب. البديل الثاني.

ج. البديل الثالث.

د. عمل لا شيء.

9. الجدول التالي يبين مصفوفة العوائد **payoff table** الخاصة بأرباح إحدى الشركات

البدائل	States of Nature		
	A	B	C
البديل1	100	120	180
لبديل2	200	100	50
البديل3	120	140	120
عمل لا شيء	0	0	0

كانت احتمالات حالات الطبيعة: **A**، و**B**، و**C** هي: **0.3**، و**0.5**، و**0.2** على التوالي، إذا تم توفير تنبؤ تام في المستقبل، ما مقدار الربح المتوقع أن يزيد عن أفضل قيمة مالية متوقعة؟

أ. 166.

ب. صفر.

ج. 36.

د. د. 40.

10. ماجد هو بائع صحف يومية، يشتري الصحيفة الواحدة بعشرة قروش ويبيعها ب (25) قرش. من خبرته قدر ماجد بأن الطلب على الصحيفة اليومية هو: **30**، أو **40**، أو **50** صحيفة، لكنه لا يعرف أياً منها سيحدث. في نهاية اليوم يبيع ماجد الصحف غير المباعة إلى أحد التجار مقابل قرشين للصحيفة الواحدة. إذ قرر ماجد أن يشتري **40** صحيفة وكان الطلب **30** صحيفة، ما مقدار الربح المتحقق؟

أ. 3.5 دينار.

ب. 3.7 دينار.

ج. 7.5 دينار.

د. 4.0 دينار.

9.2 مصادر الفصل الثاني

1. البلخي، زيد تميم (2007). مقدمة في بحوث العمليات. (ط2)، المملكة العربية السعودية ؛ الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.

2. الطراونة، محمد، وعبيدات، سليمان (2009). مقدمة في بحوث العمليات. الأردن، عمان: دار المسيرة للنشر والتوزيع.

3. العبيدي، محمود، والفضل، مؤيد عبد الحسين (2004). بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

4. الفياض، محمود، وقدادة، عيسى (2007). بحوث العمليات. الأردن، عمان: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.

5. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., Williams, Thomas A., & Martin, R. Kipp (2007). **An Introduction to Management Science: A Quantitative Approach to Decision Making.** (12th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company..

6. Bixby, R E. (2002). Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress, ***Operations Research***, 50(1): 3-15, Jan-Feb.

7. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill.

8. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

9. Taylor III, Bernard W. (2007). **An Introduction to Management Science**. (9th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

الفصل الثالث

البرمجة الخطية: النمذجة وطريقة الحل البياني

Linear Programming: Modeling & Graphic Solution Method

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد دراسة هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. تعريف مفهوم البرمجة الخطية.
2. تحديد متطلبات مشكلة البرمجة الخطية.
3. وصف مجالات استخدام البرمجة الخطية.
4. تحديد الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية ، ووصف مُحددات البرمجة الخطية.
5. صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية.
6. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني.
7. تمييز الحالات الخاصة في طريقة الرسم البياني للبرمجة الخطية.

الفصل الثالث

البرمجة الخطية: طريقة الحل البياني

Linear Programming: Graphic Solution Method

1.3 طبيعة مفهوم البرمجة الخطية

The Nature of Linear Programming Concept

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية المهمة لبحوث العمليات تم تطويرها واستخدامها بصورة فعلية في سنة (1947) على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في سلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالِم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير(Jean Baptiste Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في العام (1923). وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الاقتصادي جورج ستجلر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة، ولقد ازداد في الآونة الأخيرة استخدام تطبيقات البرمجة الخطية لحل الكثير من المشكلات التخطيطية والاقتصادية والعسكرية نظراً لتقدم وزيادة استخدام الحواسيب الإلكترونية على نطاق واسع.

إن مصطلح "البرمجة" يشير إلى استخدام الأسلوب المنطقي في تحليل المشكلة وعلاجها، في حين أن مصطلح "الخطية" (Linear) يعني أن هنالك علاقات ثابتة بين المتغيرات الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود تأخذ صيغة الخط المستقيم، وأن هذا الافتراض كثيراً ما يستخدم لتقريب الواقع إلى صيغة رياضية مبسطة.

أما البرمجة الخطية فهي الطريقة الرياضية لتخصيص الموارد النادرة آو المحددة من أجل تحقيق هدف معين ضمن شروط أو قيود معينة حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود في صورة معادلات أو متباينات خطية.

وتعرف البرمجة الخطية اختصارا على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية في بحوث العمليات، حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود هي إقترانات (دوال) خطية في متغيرات القرار. وتهتم مسائل البرمجة الخطية عموماً بتخصيص الموارد النادرة واستخدامها بأفضل طريقة ممكنة، وتتعامل بشكل خاص مع المسائل التي تتضمن إيجاد أفضل قيمة لدالة الهدف (أكبر قيمة أو أصغر قيمة بحسب الهدف) تحت عدد من القيود الناتجة عن محدودية الموارد في معظم الأحيان.

ويمكن تعريف البرمجة الخطية على أنها الطريقة الرياضية التي تستخدم للمساعدة في التخطيط وصنع القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف

2.3 متطلبات مشكلة البرمجة الخطية

Linear Programming Problem Requirements

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي:

1- تحديد الهدف الذي تسعى المنظمة إلى تحقيقه من وراء حل المشكلة: أي وجود هدف واضح ومحدد، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها "دالة الهدف Objective Function" وغالباً ما يتعلق هذا الهدف بتحقيق أقصى عائد أو ربح أو الوصول بالتكلفة إلى أدنى حد ممكن.

2- محدودية الموارد المتاحة لتحقيق الهدف، أي وجود قيود أو محددات Constraints لا يمكن تجاوزها، منها ما يتعلق برأس المال أو الموارد البشرية أو الطاقة التشغيلية للمكائن أو المواد الأولية وغيرها، وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف.

3- توفر عدد من البدائل المختلفة لاستخدام الموارد المتاحة قيد البرمجة، بحيث يكون بمقدور صانع القرار اختيار واحد من هذه البدائل.

4- إمكانية التعبير عن كافة بيانات المشكلة وهدف الدراسة والمتغيرات بصورة كمية (رقمية).

5- وجود علاقة بين العوامل المتغيرة في المشكلة الخاضعة للبرمجة، وينبغي أن تكون هذه العلاقة خطية، أي أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة من الدرجة الأولى سواء كانت القيود على هيئة معادلات أو متباينات.

3.3 مجالات استخدام البرمجة الخطية

تُعد البرمجة الخطية من أكثر الطرق المستخدمة في صناعة القرارات بشأن المشكلات التي تواجهها بحوث العمليات، ومن أمثلة الحالات التي تقدم فيها البرمجة الخطية دعماً لصانعي القرار ما يلي:

1. تحديد المزيج الإنتاجي عن طريق توزيع الموارد الإنتاجية المتاحة على العمليات الصناعية المختلفة، بما يحقق الاستخدام الأمثل أو الأنسب لهذه الموارد.

2. تحديد جداول أو برامج عمل بما يضمن تقليل تكلفة الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار حجم الطلب المتوقع.

3. تحقيق الاستغلال الأمثل (الأنسب) لمنافذ التوزيع وتحديد كمية البضائع والسلع التي يتم تجهيزها إلى مراكز الاستلام بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

4. اختيار المحفظة الاستثمارية الأمثل بحيث تكون العوائد من مكونات المحفظة تحقق أعلى عائد ممكن.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها:

أ. التطبيقات التسويقية Marketing Applications، مثل: اختيار وسائط الإعلانات، وبحوث التسويق.

ب. التطبيقات المالية Financial Applications، مثل: التخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية.

ج. تطبيقات إدارة الإنتاج Production Management Applications، مثل: الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.

د. مشاكل المزج Blending Problems.

ه. مشاكل تخطيط المشروعات Project Planning Problems

وغيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دوراً بارزاً في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

4.3 الافتراضات الأساسية للبرمجة الخطية

Linear Programming Assumptions

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي:

1- التأكد Certainty

وتعني أن القيم الموجودة في مكونات نموذج البرمجة الخطية (دالة الهدف والقيود) معروفة وثابتة ولا تتغير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث.

2- التناسبية Proportionality

ويعني ذلك أن الأنشطة مستقلة عن بعضها البعض، ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع العوامل المختلفة، كذلك فإن الكميات التي تم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل هذه الموارد.

3- الإضافية Additivity

ويعني ذلك بأن المجموع الكلي للأنشطة يساوي مجموع الأنشطة الفردية، أي أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة.

4- القابلية للقسمة أو الكسرية Divisibility or Fractionality

وهذا يعني أن حل مشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، أي أنه يتم قبول كسور كقيم لمتغيرات القرار، وإذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج، يتم اللجوء إلى استخدام البرمجة الصحيحة أو الرقمية (Integer Programming).

5- شرط أو قيد عدم السلبية Nonnegative Restrictions

وهذا يعني أن قيم متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة (غير سالبة).

5.3 محددات البرمجة الخطية

Linear programming Limitations

بالرغم من أن البرمجة الخطية قد أثبتت أنها وسيلة جيدة لحل المشاكل الكبيرة والمعقدة في القطاعين العام والخاص، إلا أن هنالك بعض المحددات عليها ومن أهمها:

1- عدم ضمان الحصول على قيم صحيحة لمتغيرات القرار باستخدام البرمجة الخطية.

2- عدم السماح بحالة عدم التأكد Uncertainty في البرمجة الخطية ذلك أن نموذج البرمجة الخطية يفترض المعرفة التامة بمساهمات متغيرات القرار واحتياجاتها وكذلك المصادر المتاحة، بعكس ما هو موجود في الواقع ولحل هذه المشكلة فهنالك وسائل أخرى يمكن استخدامها كالبرمجة الخطية في حالة عدم التأكد أو برمجة الفرصة المحددة.

3- افتراض العلاقات الخطية أو المستقيمة فيما يتعلق بدالة الهدف والقيود ذلك أنه وفي بعض الحالات العملية فإن تلك العلاقات قد تكون غير خطية وتتم معالجتها باستخدام البرمجة غير الخطية.

6.3 صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية (النمذجة) Modeling

النموذج Model هو عبارة عن صيغة رياضية أو شكل مجسم أو مصور أو مجموعة رموز تمثل مكونات المشكلة المراد حلها، والعلاقة بين أجزاءها والعوامل المؤثرة فيها أفضل تمثيل بحيث تعطي صورة واضحة ومبسطة للمشكلة.

وتعتبر عملية صياغة النموذج Model Formulation من أمتع وأصعب الأعمال التي يقوم بها باحث العمليات، ومع ذلك فإنها تمثل العمود الفقري لهذه الأعمال. فبعد تعريف المشكلة وتصنيفها تأتي الخطوة التالية وهي تمثيل المشكلة على شكل نموذج غالباً ما يكون نموذجاً رياضياً، ويجب أن يتحدد في النموذج المتغيرات وهي على ثلاثة أنواع:

أ) المتغيرات القابلة للضبط (السيطرة) Controllable Variables:

وتسمى أيضاً متغيرات القرار Decision Variables وتتميز هذه المتغيرات بأنها قابلة للمعالجة والتحكم من قبل صانعي القرار.

ب) المتغيرات غير القابلة للضبط (السيطرة) Uncontrollable Variables:

وهي المتغيرات التي لا يستطيع صانع القرار التحكم بها لأنها خارج نطاق سيطرة المنظمة، كأسعار السلع أو الأسعار المنافسة التي يفرضها المنافسون وقد تتأثر هذه المتغيرات بعوامل داخلية كالموارد المتاحة للمنظمة. وأي صياغة للمشكلة لا تدخل فيها هذه المتغيرات ستقود إلى نتائج خاطئة.

ج) المتغيرات الناتجة Result's Variables:

تساعد هذه المتغيرات في معرفة المستوى الذي تعمل فيه المنظمة لبلوغ أهدافها، وبالتالي تساعد في قياس مستوى فعالية المنظمة. وتعتمد هذه المتغيرات على كل من المتغيرات القابلة وغير القابلة للضبط.

أما الهدف من بناء النموذج فهو عرض وتحليل وتفسير المشكلة بطريقة مبسطة، تساعد في التنبؤ بما سيحدث في حال تغير أحد مكونات هذه المشكلة أو أحد العوامل المؤثرة فيها، وحتى يحقق واضع النموذج الهدف الذي وضع من أجله النموذج، يجب أن يكون ملماً بواقع المشكلة بشكل كاف، أيضا يجب أن لا يهمل الحقائق والمتغيرات المهمة في المشكلة بهدف التبسيط وكلما كان النموذج قريباً من الواقع كلما كان التحليل والتنبؤ دقيقين وبالعكس. وتصنف النماذج حسب درجة تمثيلها للمشكلة إلى نوعين هما: النماذج الفيزيائية، والنماذج الرياضية.

أ. النماذج الفيزيائية **Physical Models**:

وهي على نوعين:

1. النماذج المجسمة Iconic Models:

يطلق عليها أيضاً اسم النماذج القياسية Scaled Models وهي أقل النماذج تمثيلاً للمشكلة، وهي عبارة عن صورة مطابقة للمشكلة، لكن بمقاييس مختلفة، ومن أمثلتها مجسم الطائرات، والسيارات، والمباني، والذرة. ويُظهر هذا النوع من النماذج جميع الخصائص ذات الصلة بالمشكلة، ومع أن هذا النوع من النماذج بسيط ومتماسك إلا أن معالجته، واستخدامه لأغراض التنبؤ تعتبر عملية صعبة.

2. النماذج البديلة Analogue Models:

وهي نماذج لا تشبه المشكلة تماماً إلا أنها تتصرف بطريقة مماثله لسلوك المشكلة، من أمثلة هذه النماذج الخرائط الجغرافية.

ب. **النماذج المجردة Abstract Models:**

وهي تتمثل أساساً في النماذج الرياضية أو ما يسمى بالنماذج الكمية وهي عبارة عن تصور رقمي أو كمي للمشكلة ضمن إطار معادلات أو علاقات رياضية، وتعتبر النماذج المجردة من أكثر النماذج صلة بأساليب بحوث العمليات.

يعرف بعض الكتاب المهتمين بشؤون التحليل الكمي للمشاكل الإدارية والاقتصادية النموذج الرياضي Mathematical Model بأنه مجموعة من العلاقات الرياضية التي تربط بين كافة متغيرات وثوابت المشكلة من خلال الاستعانة بمجموعة من المعاملات والعوامل. وتعد النماذج الرياضية من أكثر النماذج استخداماً لحل المشكلات المختلفة التي تواجهها بحوث العمليات وذلك للأسباب التالية:

- سهولة معالجتها نظرياً وعملياً، كما يمكن استخدامها في الاختبارات العملية والتنبؤ.
- أسهمت النماذج الرياضية في تطوير طرق متعددة لحل المشكلات المختلفة في بحوث العمليات.
- تُمَكن النماذج الرياضية من ايجاد عدد كبير من الحلول الممكنة و/ أو المثلى.
- سهولة حوسبتها مما يوفر الوقت والجهد، ويزيد من درجة الدقة.
- تساعد النماذج الرياضية في حساب درجة المخاطرة في كثير من القرارات المتعلقة بمشكلات تتضمن حالات مخاطرة مختلفة.

إن عملية صياغة نموذج البرمجة الخطية عبارة عن فن يتجلى من خلال الممارسة والخبرة، وعلى الرغم من خصوصية المشاكل التي يواجهها صانعي القرارات في منظمات الأعمال فإن معظم هذه المشاكل تشترك في بعض الخصائص وفيما يلي مجموعة من الإرشادات التي تساعد في بناء نموذج البرمجة الخطية:

1- الفهم الشامل والكامل للمشكلة الإدارية وتدوين الملاحظات حولها خصوصاً تلك العناصر التي قد تدخل في النموذج الرياضي للمشكلة.

2- التعبير اللفظي (الكتابة اللفظية) عن دالة الهدف والقيود التي سيتم تحويله لاحقاً إلى الشكل الرياضي.

3- التعرف إلى متغيرات القرار من خلال فهم القرار المطلوب من المشكلة الإدارية، ما هي المتغيرات أو العوامل التي يدور الحديث حولها في المشكلة المعروضة؟ إن تعريف متغيرات القرار يحتاج إلى ربطها مع الهدف العام للمشكلة (دالة الهدف).

4- تحويل التعبير اللفظي لدالة الهدف وللمحددات أو القيود إلى التعبير الرياضي الخطي من حيث متغيرات القرار.

5- كتابة شرط (قيد) عدم السلبية.

وفيما يأتي مثال توضيحي لمشكلة إدارية تتعلق بالمزيج الإنتاجي وكيفية صياغتها والتعبير عنها بأسلوب البرمجة الخطية.

مثال (3- 1): حنين لصناعة الأجهزة الإلكترونية، هي شركة صناعية متخصصة بإنتاج الأجهزة الخلوية، تنتج الشركة نوعين من الهواتف الخلوية هما: N6270 وN6280، حيث يتطلب الإنتاج المرور بمحطتي عمل، تتم في المحطة الأولى عمليات التجميع، وفي محطة العمل الثانية تتم عمليات الإنهاء. يحتاج النوع N6270 إلى ساعتين عمل في محطة العمل الأولى (التجميع)، وثلاث ساعات عمل في المحطة الثانية (الإنهاء)، أما النوع N6280 فيحتاج إلى خمس ساعات في محطة العمل الأولى (التجميع)، وثلاث ساعات عمل في المحطة الثانية (الإنهاء). الوقت المتوفر لعمليات التجميع داخل محطة العمل الأولى (180) ساعة عمل، أما الوقت المتوفر لعمليات الإنهاء داخل محطة العمل الثانية (135) ساعة عمل. تربح كل وحدة من النوع N6270 (100) دينار، و تربح الوحدة الواحدة من النوع N6280 (200) دينار. ترغب الشركة في تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل نوع من الهواتف الخلوية لجعل الأرباح أعلى ما يمكن.

تعتمد عملية بناء النموذج الرياضي الخطي لهذه المشكلة على تحديد ومعرفة كل من: متغيرات القرار، القيود أو محددات القرار في المشكلة، والهدف المطلوب تحقيقه لتحديد الحل الأمثل (الأفضل) من بين قيم الحل الممكن لمتغيرات القرار.

ولتحديد ومعرفة هذه العناصر بفعالية، يجب إعطاء تلخيص لفظي للمشكلة المطروحة. وبالنسبة لمثال حنين لصناعة الأجهزة الالكترونية، فأن الوصف اللفظي لها يكون على النحو الأتي:

ترغب الشركة في تحديد الكميات (بالوحدات) من كلّ نوع من الهواتف الخلوية N6270 وN6280 التي يجب إنتاجها لجعل الأرباح (بالدينار) أعلى ما يمكن، آخذين بعين الاعتبار محددات الوقت المتاح لكل محطة عمل تمر بها عملية الإنتاج.

اعتماداً على الوصف اللفظي للمشكلة، يمكن بناء نموذج البرمجة الخطية لتلك المشكلة عن طريق تحويل التعبير اللفظي إلى التعبير الرياضي كما يلي:

1. متغيرات القرار **Decision Variables**:

بما أن الشركة ترغب في تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع من N6270 وN6280، فإنه يمكن تعريف متغيرات القرار لنموذج البرمجة الخطية رياضياً على النحو الأتي:

X_1: عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع N6270.

X_2: عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع N6280.

2. دالة الهدف **Objective Function**:

وهي ما نرغب في تحقيقه، وبما أن كل وحدة من النوع N6270 تربح (100) دينار، فإن الربح من بيع (X_1) وحدة هو ($100X_1$)، و بما أن كل وحدة من النوع N6280 تربح (200) دينار، فإن الربح من بيع (X_2) وحدة هو ($200X_2$)، وتحت فرض الإضافية فإن بيع المنتجات من N6270 وN6280 هو مستقل، ويكون الربح الكلي المتحقق هو مجموع أرباح المنتجين، ويرمز له بالرمز (Z)، لذلك فإن الشكل الرياضي لدالة الهدف هو:

$$\mathbf{Z = 100\ X_1 + 200\ X_2}$$

وبما أن الهدف هو جعل الأرباح أعلى ما يمكن، يصبح الشكل الرياضي لدالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{Maximize } Z = 100\,X_1 + 200\,X_2$$

3. القيود أو المحددات **Constraints**:

تتمثل محددات مشكلة شركة حنين لصناعة الأجهزة الالكترونية في الوقت المتوفر لعمليات التجميع في محطة العمل الأولى، والوقت المتوفر لعمليات الإنهاء في محطة العمل الثانية، حيث أن:

- القيد الأول: وقت عمليات التجميع الذي يحتاجه كلا النوعين أقل من أو يساوي الوقت المتوفر لعمليات للتجميع.
- القيد الثاني: وقت عمليات الإنهاء الذي يحتاجه كلا النوعين أقل من أو يساوي الوقت المتوفر لعمليات الإنهاء.

ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$2X_1 + 5X_2 \leq 180$$
$$3X_1 + 3X_2 \leq 135$$

4. شرط أو قيد عدم السلبية **Nonnegative Constraint**:

لتجنب الحصول على قيم سالبة لمتغيرات القرار، يتم وضع قيد أو شرط اللاسلبية، بحيث:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بناءً على ما سبق، يمكن كتابة الشكل الكلي لنموذج البرمجة الخطية الخاص بشركة حنين لصناعة الأجهزة الالكترونية على النحو التالي:

$$\text{Maximize (Max) } Z = 100\,X_1 + 200\,X_2$$

Subject To:

$$2X_1 + 5X_2 \leq 180$$

$$3X_1 + 3X_2 \leq 135$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (3- 2): تنتج إحدى الشركات الأردنية لصناعة الأدوية نوعاً من الأدوية يستخدم لتسكين الآلام، يتكون هذا المسكن من عنصرين هما: X وY، يحتوي كل عنصر متهما على ثلاثة مضادات حيوية هي:A1، A2، وA3، وبنسب مختلفة. يحتاج كل 1غم من **X** إلى **3** وحدات من **A1**، وكل 1غم من **Y** يحتاج إلى وحدة واحدة من **A1**، ويتطلب المسكن **6** وحدات من **A1**. وعلى الأقل **4** وحدات من **A2**، وكل 1غم من **X** و**Y** يحتاج إلى وحدة واحدة من **A2**، أيضا إن إنتاج هذا المسكن يتطلب على الأقل **12** وحدة من المضاد **A3**، حيث أن كل 1غم من **X** يحتاج إلى **3** وحدات من **A3**، وكل 1غم من **Y** فيحتاج إلى **6** وحدات من **A3**. قدرت الشركة بأن كلفة الغرام الواحد من **X** (**80** دينار)، وكلفة الغرام الواحد من **Y** (**50** دينار). ترغب الشركة في معرفة عدد الوحدات التي يجب شراؤها من كل عنصر لجعل التكاليف أقل ما يمكن.

المطلوب:

بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟

الحل:

الوصف اللفظي للمشكلة

ترغب الشركة في تحديد الكميات (بالغرام) من كل عنصر من العناصر X وY التي يجب شراؤها لجعل التكاليف (بالدينار) أقل ما يمكن، آخذين بعين الاعتبار محددات نسب المضادات الحيوية الداخلة في تركيب العناصر التي يتكون منها المسكن.

اعتماداً على الوصف اللفظي للمشكلة، يمكن بناء نموذج البرمجة الخطية لتلك المشكلة عن طريق تحويل التعبير اللفظي إلى التعبير الرياضي كما يلي:

- متغيرات القرار:

X_1: عدد الوحدات التي يحتويها المسكن من العنصر X.

X_2: عدد الوحدات التي يحتويها المسكن من العنصر Y.

- دالة الهدف:

بما أن تكلفة كل 1 غرام من X هي (80) دينار، فإن تكلفة (X_1) غرام هو ($80X_1$)، و بما أن كل 1 غرام من Y يكلف (50) دينار، فإن تكلفة (X_2) غرام هي ($50X_2$)، وتحت فرض الإضافية فإن تكلفة X وY مستقلة، وتكون التكلفة الكلية المتحققة هي مجموع تكاليف العنصرين، ويرمز لها بالرمز (Z)، لذلك فإن الشكل الرياضي لدالة الهدف هو:

$$Z = 80\ X_1 + 50\ X_2$$

وبما أن الهدف هو جعل التكاليف أقل ما يمكن، يصبح الشكل الرياضي لدالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{Minimize } Z = 80\ X_1 + 50\ X_2$$

- القيود أو المحددات:

▪ القيد الأول: يمثل عدد الوحدات من المضاد الحيوي A1 التي يحتاجها العنصرين X وY تساوي عدد الوحدات من المضاد الحيوي A1 التي يحتاجها المسكن. لذلك فإن الشكل الرياضي للقيد الأول يكون على النحو التالي:

$$3X_1 + 1X_2 = 6$$

لاحظ أن إشارة القيد هي (=) لأن الكمية من المضاد الحيوي A1 التي يحتاجها المسكن محددة بست وحدات فقط.

▪ القيد الثاني: يمثل عدد الوحدات من المضاد الحيوي A2 التي يحتاجها العنصرين X وY أكبر من أو تساوي عدد الوحدات من المضاد الحيوي A2 التي يحتاجها المسكن. لذلك فإن الشكل الرياضي للقيد الأول يكون على النحو التالي:

$1X_1 + 1X_2 \geq 4$

لاحظ أن إشارة القيد الثاني هي (≤: أكبر من أو يساوي) لأن الكمية من المضاد الحيوي A2 التي يحتاجها المسكن يجب أن تكون أربع وحدات على الأقل، أي أن الحد الأدنى يجب أن يكون (4).

- القيد الثالث: يمثل عدد الوحدات من المضاد الحيوي A3 التي يحتاجها العنصرين X و Y أكبر من أو تساوي عدد الوحدات من المضاد الحيوي A3 التي يحتاجها المسكن. لذلك فإن الشكل الرياضي للقيد الأول يكون على النحو التالي:

$3X_1 + 6X_2 \geq 12$

لاحظ أن إشارة القيد الثالث هي (≤: أكبر من أو يساوي) لأن الكمية من المضاد الحيوي A3 التي يحتاجها المسكن يجب أن تكون (12) وحدة على الأقل، أي أن الحد الأدنى يجب أن يكون (12).

- **شرط أو قيد عدم السلبية:**

لتجنب الحصول على قيم سالبة لمتغيرات القرار، يتم وضع قيد أو شرط اللاسلبية، بحيث:

$X_1, X_2 \geq 0$

بناءً على ما سبق، يمكن كتابة الشكل الكلي لنموذج البرمجة الخطية الخاص بشركة إنتاج الأدوية على النحو التالي:

Minimize (Min) $Z = 80 X_1 + 50 X_2$

Subject To:

$3X_1 + 1X_2 = 6$

$1X_1 + 1X_2 \geq 4$

$3X_1 + 6X_2 \geq 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

من خلال الأمثلة السابقة، نلاحظ آنه يمكن أن نكتب النموذج العام لمشكلة البرمجة الخطية في إيجاد القيم المثلى (الأعظم Max أو الأصغر Min) على النحو الأتي:

$$Max\ or\ Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad ; \quad i=1,2,\ldots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad ; \quad i=s+1,s+2,\ldots,s+t$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad ; \quad i=s+t+1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad ; \quad j=1,2,\ldots,r$$

حيث أن:

Xj: قيمة المتغير j الذي يمثل منتج معين أو نشاط معين.

Cj: معامل متغير القرار Xj في دالة الهدف.

aij: ما يحتاجه المتغير (j) من المورد (i).

بعد إعطاء نموذج البرمجة الخطية لمشكلة ما، فإننا نتوجه للبحث عن حل هذا النموذج. وبما أن نماذج البرمجة الخطية متنوعة هدفها البحث عن قيمة صغرى أو عظمى لدالة الهدف وخاضعة لقيود قد تكون بشكل (≤ أكبر من أو يساوي) أو بالشكل (≥ أصغر من أو يساوي) أو بالشكل (= يساوي). فإننا نجد أنه من الضروري تعديل الشكل العام للبرامج الخطية لنتمكن من تطبيق خوارزميات الحل التي نستعرضها في الفصول القادمة.

وتصنف حلول مشكلة البرمجة الخطية إلى ما يلي:

- حل ممكن Feasible Solution: وهو الحل الذي يلبي احتياجات جميع القيود، أي لا يتعارض مع أي من القيود الفعلية.
- حل غير ممكن Infeasible Solution: وهو الحل الذي يلبي احتياجات جزء من القيود، أي يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود.
- حل أمثل Optimal Solution: وهو أفضل الحلول الممكنة، وقد يوجد للمشكلة حل أمثل وحيد Unique، أو عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solutions، ويقدم تعدد الحلول المثلى مرونة أكبر لصانع القرار عند قيامه بتنفيذ أحدها.
- حل غير أمثل Non Optimal Solution: هو أي حل ممكن أو غير ممكن لا يتم تصنيفه كحل أمثل.

7.3 حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني Graphical Solution Methd

تعد هذه الطريقة وسيلة سهلة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي لا تزيد متغيراتها عن اثنين، بالرغم من ذلك فإنها تبقى من الطرق المفيدة و اللازمة، حيث أن دراستها و فهمها يساعدان في توضيح وفهم بعض المفاهيم.

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لا بد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

1. رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة وتسميتها، أي المحور الأفقي والمحور العمودي.
2. رسم جميع الخطوط المستقيمة الممثلة لجميع القيود مع تحديد منطقة حل كل قيد.

3. تحديد المنطقة التي تمثل منطقة حل جميع القيود وتسمى منطقة الحل الكلية (Feasible Region) أو منطقة الحل الممكن.

4. تحديد حدود منطقة الحل الكلية عن طريق تعيين النقاط الطرفية (Extreme Point) لمنطقة الحل الكلية.

5. إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط الطرفية المحيطة بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة (X_1, X_2).

6. نجد قيمة Z التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط الطرفية عن طريق تعويض إحداثيات النقطة الطرفية في دالة الهدف.

7. نحدد نقطة الحل الأمثل Optimal Point، وهي النقطة التي قيمة (Z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف تعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيمة (Z) عندها أقل ما يمكن في حال كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية الخاص بمشكلة شركة حنين لصناعة الأجهزة الالكترونية

Maximize $Z = 100X_1 + 200X_2$

Subject To:

$2X_1 + 5X_2 \leq 180$

$3X_1 + 3X_2 \leq 135$

$X_1, X_2 \geq 0$

أولا :

رسم الخطوط المستقيمة الممثلة لكل قيد من القيود وتحديد منطقة حل كل قيد

أ – رسم الخط المستقيم الممثل للقيد الأول

بعد رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة، نقوم برسم الخط المستقيم الممثل للقيد الأول وذلك بعد تحويل إشارة عدم التكافؤ (≥ أقل من أو يساوي) إلى إشارة المساواة (=) بعدها نجد نقط تقاطع القيد الأول مع محوري المشكلة، حيث أن نقطة تقاطع أي قيد مع المحور الأفقي نجدها عن طريق افتراض بأن قيمة X_2 تساوي صفر، ونقطة تقاطع أي قيد مع المحور العمودي نجدها عن طريق افتراض بأن قيمة X_1 تساوي صفر، كما يلي:

$$2X_1 + 5X_2 \leq 180$$
$$2X_1 + 5X_2 = 180$$

افترض بأن قيمة X_2 تساوي صفر (أي لم يتم إنتاج أي وحدة من المنتج X_2)، فإن المعادلة تصبح:

$$2X_1 + 5(0) = 180$$
$$2X_1 = 180$$

وبالتالي فإن قيمة X_1 تكون:

$$X_1 = 180/2 = 90$$

إذن فإن إحداثيات نقطة تقاطع القيد الأول مع المحور الأفقي هي (0 ,90) كما هو مبين في الشكل (3- 1) النقطة B.

ولإيجاد نقطة تقاطع القيد الأول مع المحور العمودي نفترض بأن قيمة X_1 تساوي صفر (أي أنه لم يتم إنتاج أي وحدة من المنتج X_1) فإن المعادلة تصبح:

$$2(0) + 5X_2 = 180$$

$$5X_2 = 180$$

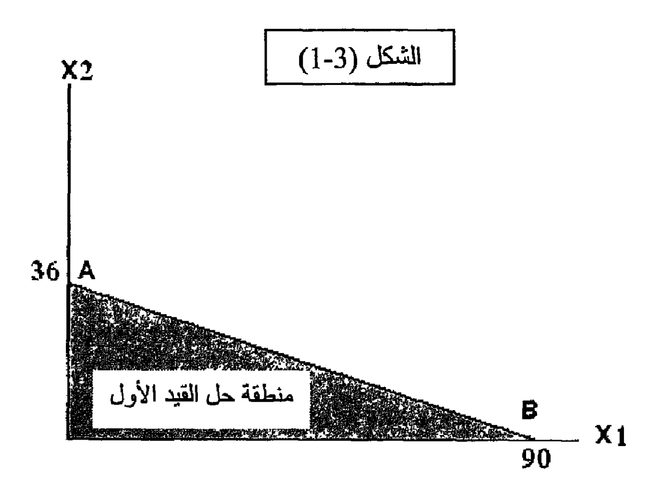
وبالتالي فإن قيمة X_2 تكون:

$$X_2 = 180/5 = 36$$

إذن فإن إحداثيات نقطة تقاطع القيد الأول مع المحور العمودي هي (0, 36) كما هو مبين في الشكل (3- 1) النقطة A.

بعد تحديد نقطتي التقاطع نصل بينهما بخط مستقيم، ولتحديد منطقة حل القيد نأخذ أي نقطة تقع أعلى الخط، وأي نقطة أسفل الخط ونعوضها في القيد الأول، فتكون منطقة حل القيد باتجاه النقطة التي تحققه. وتعتبر المنطقة المظللة في الشكل (3- 1) هي منطقة حل القيد الأول ، أي أن جميع النقاط في هذه المنطقة أو على الخط الممثل للقيد تفي باحتياجات القيد الأول ولا تتعارض معه.

الشكل (3-1)



ب – رسم الخط المستقيم الممثل للقيد الثاني

بعد رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة، نقوم برسم الخط المستقيم الممثل للقيد الثاني وذلك بعد تحويل إشارة عدم التكافؤ (≥ أقل من أو يساوي) إلى إشارة المساواة (=) بعدها نجد نقط تقاطع القيد الثاني مع محوري المشكلة، كما يلي:

$$3X_1 + 3X_2 \leq 135$$

$$3X_1 + 3X_2 = 135$$

افترض بأن قيمة X_2 تساوي صفر (أي لم يتم إنتاج أي وحدة من المنتج X_2)، فإن المعادلة تصبح:

$$3X_1 + 3(0) = 135$$

$$3X_1 = 135$$

وبالتالي فإن قيمة X_1 تكون:

$$X_1 = 135/3 = 45$$

إذن فإن إحداثيات نقطة تقاطع القيد الثاني مع المحور الأفقي هي (45, 0) كما هو مبين في الشكل (3- 2) النقطة C.

ولإيجاد نقطة تقاطع القيد الثاني مع المحور العمودي نفترض بأن قيمة X_1 تساوي صفر (أي أنه لم يتم إنتاج أي وحدة من المنتج X_1) فإن المعادلة تصبح:

$$3(0) + 3X_2 = 135$$

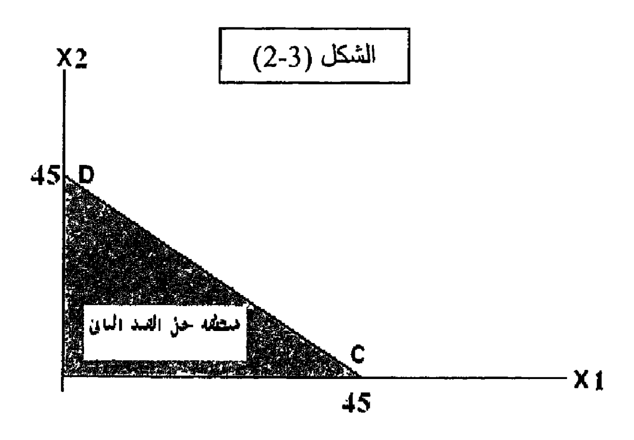
$$3X_2 = 135$$

وبالتالي فإن قيمة X_2 تكون:

$$X_2 = 135/3 = 45$$

إذن فإن إحداثيات نقطة تقاطع القيد الثاني مع المحور العمودي هي (0, 45) كما هو مبين على الشكل (3- 2) النقطة D.

بعد تحديد نقطتي التقاطع نصل بينهما بخط مستقيم، وتعتبر المنطقة المظللة في الشكل (2- 2) هي منطقة حل القيد الثاني، أي أن جميع النقاط في هذه المنطقة أو على الخط الممثل للقيد تفي باحتياجات القيد الثاني ولا تتعارض معه.

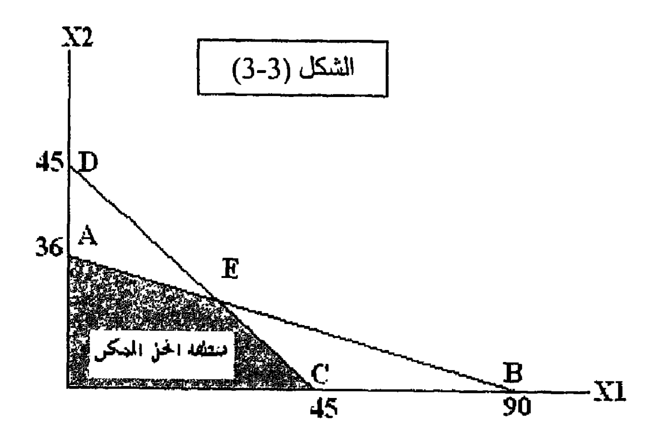


الشكل (2-3)

ثانيا:

تحديد منطقة الحل الكلية (منطقة الحل الممكن Feasible Region)

لتحديد منطقة الحل الممكن يجب تجميع جميع الخطوط المستقيمة الممثلة للقيود في شكل واحد كما هو مبين في الشكل (3- 3). حيث أن المنطقة التي حدودها A، E، C هي المنطقة الوحيدة التي تنسجم وتفي بمتطلبات واحتياجات جميع القيود ونسميها منطقة الحل الممكن أو المنطقة الكلية للحل.



الشكل (3-3)

لغاية الآن تم تحديد منطقة الحل الممكن، ولا بد من تحديد النقطة ضمن هذه المنطقة والتي تعطينا أفضل النتائج (الحل الأمثل) لهذه المشكلة ويمكن الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام واحدة من الطريقتين الآتيتين وهما :

1- طريقة خطوط الربح المتكافئة Iso _ Profit lines

2- طريقة نقط الزوايا (النقط الطرفية) Extreme Points Method

ولأن طريقة خطوط الربح المتكافئة تعتمد على مبدأ التجربة، سيتم التركيز هنا على طريقة نقط الزوايا (حدود منطقة الحل). حيث أنها تعتبر أسهل و أسرع من طريقة خطوط الربح، وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد الربح (التكلفة) الذي يمكن الحصول عليه عند كل زاوية من زوايا منطقة الحل الممكن، ذلك أن النظرية الرياضية التي تعتمد عليها البرمجة الخطية (نظرية النقطة الطرفية) تقول بأن الحل الأمثل أو الأفضل يقع على إحدى النقاط الطرفية التي تمثل زوايا منطقة الحل الممكن، ولهذا فإن من الضروري إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط الطرفية وقيمة الربح أو التكلفة حسب دالة الهدف عند كل نقطة، أي إيجاد قيمة (Z) عند كل زاوية من زوايا الحل الممكن.

إذا نظرنا إلى الشكل (3- 3) نجد آن زوايا الحل الممكن هي A، E، و C حيث نقوم بإيجاد قيمة X_2 و X_1 عند كل زاوية من زوايا الحل الممكن ومن ثم إيجاد الربح المصاحب لها (Z) وعلى النحو التالي:

- **النقطة A:**

تمثل هذه النقطة إحدى زوايا منطقة الحل الممكن والتي نتجت عن تقاطع القيد الأول مع المحور العمودي.

$$2X_1 + 5X_2 = 180 \quad \text{.....................} \quad (1)$$

$X_1 = 0$ .... المحور العمودي

بما أن قيمة X_1 محددة وتساوي صفر، نعوضها في القيد الأول لنحصل على قيمة X_2 كما يلي:

$$2(0) + 5X_2 = 180$$

$$5X_2 = 180$$

$$X_2 = 180/5$$

$$X_2 = 36$$

إذن فإن إحداثيات النقطة A هي (0, 36) وقيمة الربح (Z) عند هذه النقطة نجدها من خلال التعويض في دالة الهدف كما يلي:

$$Z = 100\ X_1 + 200\ X_2$$

$$Z = 100\ (0) + 200\ (36)$$

$$Z_A = 7200$$

- **النقطة E:**

تمثل هذه النقطة إحدى زوايا منطقة الحل الممكن والتي نتجت عن تقاطع القيد الأول مع القيد الثاني.

$$2X_1 + 5X_2 \leq 180 \text{ .... } (1)$$
$$3X_1 + 3X_2 \leq 135 \text{ .... } (2)$$

ولإيجاد إحداثيات هذه النقطة نستخدم واحدة من الطرق التالية:

أولا : التعويض.

ثانيا : الجمع الجبري.

أولاً، طريقة التعويض

لإيجاد الإحداثيات بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

1- نعرف أحد المتغيرين بدلالة الآخر، أي نعرف X_1 بدلالة X_2 أو X_2 بدلالة X_1 باستخدام أي من المعادلتين ، ولنأخذ على سبيل المثال المعادلة الثانية (القيد الثاني)

$$3X_1 + 3X_2 \leq 135 \text{ .... } (2)$$

عند نقطة التقاطع تكون إشارة القيد مساواة (=).

$$3X_1 + 3X_2 = 135 \text{ .... } (2)$$

نعيد ترتيب المعادلة لتصبح

$$3X_1 = 135 - 3X_2$$

نقسم المعادلة على (3) للتخلص من معامل X_1 لتصبح المعادلة على النحو التالي:

$$X_1 = 45 - X_2$$

2- نعوض نتيجة الخطوة السابقة في القيد الأول كما يلي:

$$2\,(45 - X_2) + 5X_2 = 180$$

نفك الأقواس ونعيد ترتيب المعادلة على النحو الآتي:

$$90 - 2X_2 + 5X_2 = 180$$
$$3X_2 = 180 - 90$$
$$X_2 = 90/3 \longrightarrow X_2 = 30$$

3- نعوض قيمة X_2 المحسوبة في الخطوة السابقة في معادلة X_1 التي أوجدناها في الخطوة الأولى، وذلك لنستخرج قيمة X_1، وعلى النحو الأتي:

$$X_1 = 45 - X_2$$

$$X_1 = 45 - 30$$

$$X_1 = 15$$

تمرين: طبق الخطوة الأولى من هذه الطريقة على القيد الأول، أي عرف X_1 بدلالة X_2 أو X_2 بدلالة X_1 من خلال المعادلة $2X1 + 5X_2 = 180$ وتتبع نفس خطوات الحل، هل ستصل إلى نفس النتيجة؟ (الجواب: نعم).

بناءً على ما سبق فإن إحداثيات النقطة E هي (15, 30) وقيمة الربح عند هذه النقطة هو:

$$Z = 100\ X_1 + 200\ X_2$$

$$Z = 100\ (15) + 200\ (30)$$

$$Z_E = 1500 + 6000 = 7500$$

ثانياً : طريقة الجمع الجبري

لإيجاد إحداثيات النقطة E بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

1. نحول القيود (قيود نقطة E) من صيغة المتباينة إلى صيغة المعادلة، أي نغير إشارة القيود إلى المساواة، على النحو الأتي:

$$2X_1 + 5X_2 = 180 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$3X_1 + 3X_2 = 135 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

2. لإيجاد قيم X_1 وX_2 يجب التخلص من أحدها لنجد الآخر وهذا يتم من خلال إجراء ضرب تبادلي بين معاملات المتغير المراد التخلص منه والتأكد من اختلاف إشارة معاملات المتغير المراد التخلص منه في المعادلتين، فإذا أردنا التخلص من المتغير (X_1) نضرب المعادلة الأولى بمعامل المتغير (X_1) في المعادلة الثانية أي في (3)، ونضرب المعادلة الثانية بمعامل المتغير (X_1) في المعادلة الأولى أي في (2)، ثم نقوم بضرب إحدى

المعادلتين في (-1) لتغيير الإشارة، وإذا أردنا التخلص من المتغير (X_2) نضرب المعادلة الأولى بمعامل المتغير (X_2) في المعادلة الثانية أي في (3)، ونضرب المعادلة الثانية بمعامل المتغير (X_2) في المعادلة الأولى أي في (5)، ثم نقوم بضرب إحدى المعادلتين في (-1) لتغيير الإشارة، وفي كل الأحوال يعتمد ذلك على طبيعة المعادلات، ومهما كانت الطريقة فإن النتيجة النهائية ستكون واحدة ويكون الحل على النحو التالي:

$$2X_1 + 5X_2 = 180$$

$$3X_1 + 3X_2 = 135$$

نجري عملية الضرب التبادلي للتخلص من المتغير (X_2)، لنجد قيمة المتغير (X_1)، وعلى النحو الأتي:

$$(2X_1 + 5X_2 = 180) * 3 = 6X_1 + 15X_2 = 540$$

$$(3X_1 + 3X_2 = 135) * 5 = 15X_1 + 15X_2 = 675$$

وللتخلص من المتغير (X_2) نضرب إحدى المعادلتين السابقتين في (-1) ونجري عملية الجمع على النحو الأتي:

$$-6X_1 - 15X_2 = -540 \qquad (6X_1 + 15X_2 = 540) * -1)$$

$$15X_1 + 15X_2 = 675$$

$$9X_1 = 135$$

$$X_1 = 135/9 \longrightarrow X_1 = 15$$

نعوض هذه النتيجة في أي من المعادلتين لنجد قيمة X_2 على النحو التالي :

$$2X_1 + 5X_2 = 180$$

$$2(15) + 5X_2 = 180$$

$$5X_2 = 180 - 30$$

$$X_2 = 150/5 \longrightarrow X_2 = 30$$

بناءً على ما سبق فإن إحداثيات النقطة E حسب طريقة الجمع الجبري هي (15, 30) وهي نفسها التي تم احتسابها عند استخدام طريقة التعويض و بالتالي فإن قيمة (Z) ستكون نفسها وتساوي (7500) .

- **النقطة C**

تمثل هذه النقطة إحدى زوايا منطقة الحل الممكن والتي نتجت عن تقاطع القيد الثاني مع المحور الأفقي.

$3X_1 + 3X_2 = 135$ .... (2)

$X_2 = 0$ ....المحور الأفقي

بما أن قيمة X_2 محددة وتساوي صفر، نعوضها في القيد الثاني لنحصل على قيمة X_1 كما يلي:

$$3X_1 + 3(0) = 135$$
$$3X_1 = 135$$
$$X_1 = 135/3$$
$$X_1 = 45$$

إذن فإن إحداثيات النقطة C هي (45, 0) وقيمة الربح (Z) عند هذه النقطة نجدها من خلال التعويض في دالة الهدف كما يلي:

$$Z = 100\ X_1 + 200\ X_2$$
$$Z = 100\ (45) + 200\ (0)$$
$$Z_C = 4500$$

و الجدول التالي يلخص النتائج التي تم التوصل إليها:

النقطة	X_1	X_2	Z
A	0	36	7200
E	15	30	7500
C	45	0	4500

نلاحظ من الجدول أن قيمة الربح (Z) عند النقطة E كان أعلى ما يمكن، وهذا يعني أن النقطة E هي نقطة الحل الأمثل Optimal point، وقيمة الربح عند الحل الأمثل تساوي (7500). وتسمى القيود التي نقطة تقاطعها تشكل نقطة الحل الأمثل بالقيود المتلاحمة Binding Constraints، وهذا يعني أن عند نقطة تقاطع هذه القيود تكون قيم المتغيرات الراكدة (زائدة Slack، أو فائضة Surplus) تساوي صفر. أي أن الموارد الممثلة بالقيود المتلاحمة تم استهلاكها بالكامل.

مثال (3- 3) حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني.

Min $Z = 3X_1 + 2X_2$

ST

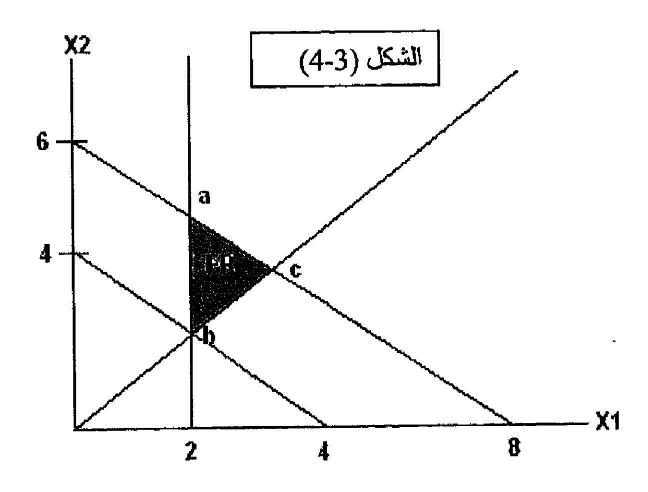
$2X_1 + 2X_2 \geq 8$ -------- 1

$3X_1 + 4X_2 \leq 24$ -------2

$1X_1 - X_2 \leq 0$ ---------3

$1X_1 \geq 2$ -------------- 4

$X_1, X_2 \geq 0$



- **أولا** : رسم الخطوط المستقيمة الممثلة لكل قيد من القيود وتحديد منطقة حل كل قيد
- **ثانيا** : تحديد منطقة الحل الكلية (منطقة الحل الممكن Feasible Region)

إذا نظرنا إلى الشكل (3- 4) نجد أن زوايا الحل الممكن هي a، b، وc حيث نقوم بإيجاد قيمة X_2, X_1 عند كل زاوية من زوايا الحل الممكن ومن ثم إيجاد الربح المصاحب لها (Z) وعلى النحو التالي:

- **النقطة a:**

تمثل هذه النقطة إحدى زوايا منطقة الحل الممكن والتي نتجت عن تقاطع القيد الثاني مع القيد الرابع.

$$3X_1 + 4X_2 = 24 \quad \text{-------}2$$

$$1X_1 = 2 \text{ ------------------- } 4$$

بما أن قيمة X_1 محددة وتساوي (2)، نعوضها في القيد الثاني لنحصل على قيمة X_2 كما يلي:

$$3(2) + 4X_2 = 24$$

$$6 + 4X_2 = 24$$

$$4X_2 = 18$$

$$X_2 = 4.5$$

إذن فإن إحداثيات النقطة A هي (2, 4.5) وقيمة التكلفة (Z) عند هذه النقطة نجدها من خلال التعويض في دالة الهدف كما يلي:

$$Z= 3X_1 + 2X_2$$

$$Z = 3\ (2) + 2\ (4.5)$$

$$Z_A = 15$$

• النقطة b:

تمثل هذه النقطة إحدى زوايا منطقة الحل الممكن والتي نتجت عن تقاطع القيود: الأول والثالث والرابع.

$2X_1 + 2X_2 = 8$ --------- 1

$1X_1 - X_2 = 0$ --------- 3

$1X_1 = 2$ --------- 4

بما أن قيمة X_1 محددة وتساوي (2)، نعوضها في معادلة القيد الأول، أو في معادلة القيد الثالث، لنحصل على قيمة X_2 كما يلي:

$2(2) + 2X_2 = 8$

$4 + 2X_2 = 8$

$2X_2 = 4$

$X_2 = 2$

إذن فإن إحداثيات النقطة b هي (2, 2) وقيمة التكلفة (Z) عند هذه النقطة نجدها من خلال التعويض في دالة الهدف كما يلي:

$Z= 3X_1 + 2X_2$

$Z = 3 (2) + 2 (2)$

$Z_A = 10$

• النقطة c:

تمثل هذه النقطة إحدى زوايا منطقة الحل الممكن والتي نتجت عن تقاطع القيود: الثاني والثالث. ولإيجاد إحداثيات هذه النقطة نستخدم واحدة من الطرق التالية: التعويض أو الجمع الجبري. باستخدام إحدى الطريقتين سيتم تحديد إحداثيات النقطة c، وهي (3.43, 3.43) وقيمة التكلفة (Z) عند هذه النقطة يساوي (17.15)

و الجدول التالي يلخص النتائج التي تم التوصل إليها:

النقطة	X_1	X_2	Z
a	2	4.5	15
b	2	2	*10*
c	3.43	3.43	17.15

نلاحظ من الجدول أن قيمة التكلفة (Z) عند النقطة b كانت أقل ما يمكن، وهذا يعني أن النقطة b هي نقطة الحل الأمثل Optimal point، وقيمة التكاليف عند الحل الأمثل تساوي (10).

8.3 حالات ومشاكل خاصة في طريقة الرسم البياني للبرمجة الخطية
Special Cases in the Graphical Method of LP

هناك أربع حالات ومشاكل خاصة تظهر عند استخدام طريقة الرسم البياني في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي:

1. تعذر الحل أو عدم وجود منطقة حل ممكن Infeasibility.
2. عدم توفر الحدود Unboundedness.
3. تعدد البدائل (توفر عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solution).
4. القيد الفائض Redundant Constraint.

وفيما يلي توضيح لهذه الحالات الخاصة:

1. تعذر الحل أو عدم وجود منطقة حل ممكن Infeasibility

وتعني هذه الحالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات جميع القيود، أي عدم وجود منطقة حل ممكن، وتحدث هذه الحالة إذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تضم قيوداً متعارضة.

مثال (3- 4): حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Max $Z = 3X_1 + 5X_2$

St.

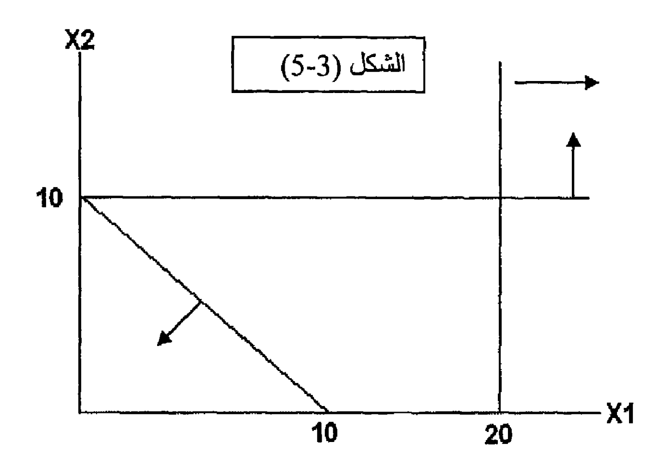
$2X_1 + 2X_2 \leq 20$

$X_1 \geq 20$

$X_2 \geq 10$

$X_1, X_2 \geq 0$

ويوضح الشكل (3- 5) الرسم البياني الممثل لهذه المشكلة، حيث نلاحظ من الشكل بأنه لا توجد منطقة مشتركة تفي باحتياجات جميع قيود نموذج البرمجة الخطية وهذا يعني تعذر الوصول إلى حل لهذه المشكلة



2. عدم توفر الحدود **Unboundedness**.

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من قيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية Open-ended علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم Maximization.

مثال (3- 5): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية

$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$

St.

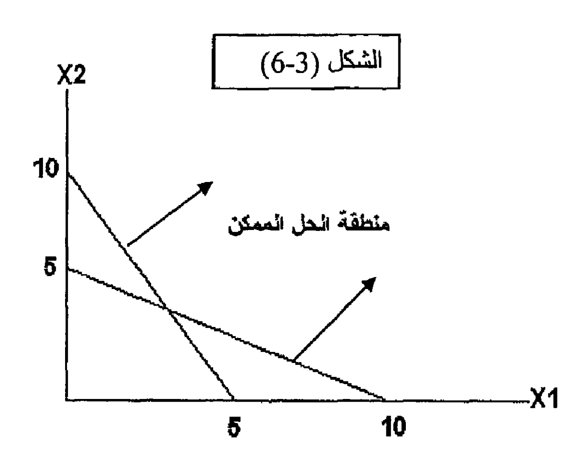
$2X_1 + 4X_2 \geq 20$

$4X_1 + 2X_2 \geq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

ويوضح الشكل (3- 6) الرسم البياني الممثل لهذه المشكلة، حيث نلاحظ أن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهذه يعني عدم وجود قيود على الحل.

الشكل (3-6)



3. تعدد البدائل (توفر عدة حلول مثلى **Alternate Optimal Solution**)

وتعني أن مشكلة البرمجة الخطية لها أكثر من نقطة حل أمثل، أي أن قيمة (Z) متساوية عند أكثر من نقطة.

مثال (3- 6): أفترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 5X_2$$

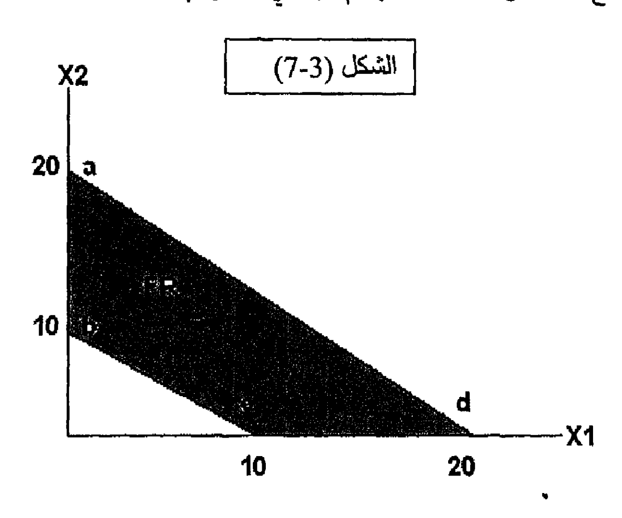
St.

$$1X_1 + 1X_2 \leq 20$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 20$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل (3- 7) الرسم البياني الممثل لهذه المشكلة



نلاحظ من الشكل بأن زوايا منطقة الحل الممكن هي D, C, B, A وعند اختبار هذه الزوايا نجد بأن نقطة الحل الأمثل تقع على أكثر من زاوية، وهذا يعني بأن المشكلة بها أكثر من حل أمثل.

نلاحظ بأن النقطتين A و D يحققان نفس الأرباح كذلك فإن أي نقطة تقع على الخط الواصل بين النقطتين A و D سوف تعطي نفس الأرباح.

4. القيد الفائض **Redundant Constraint**

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها وجود قيد فائض وهو ذلك القيد الذي لا يؤثر على منطقة الحل الممكن بشرط أن تكون تلك المنطقة داخل منطقة حل ذلك القيد. وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية

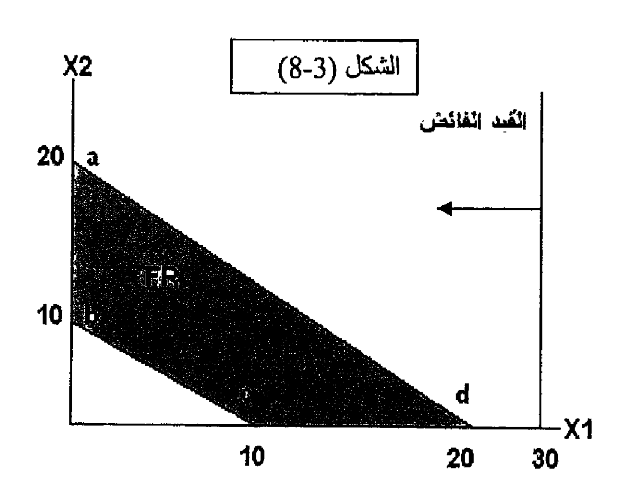
والمثال (3- 7) التالي يوضح هذه الحالة.

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 5X_2$$

St.

$$1X_1 + 1X_2 \leq 20$$
$$2X_1 + 2X_2 \geq 20$$
$$1X_1 \leq 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

والشكل (3- 8) يمثل الرسم البياني لهذه المشكلة



نلاحظ من الشكل (3- 8) وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث ($1X_1 \leq 30$) حيث أن هذا القيد لم يؤثر على منطقة الحل الممكن إذ أن القيدين الأول والثاني أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً للمشكلة وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

9.3 تمارين محلولة

1. يرغب أحد البنوك وضع سياسة لتوزيع القروض التي لا تتجاوز 12 مليون دينار. الجدول التالي يبين أنواع القروض المختلفة علماً بأن نسبة الدين المعدوم غير قابلة لإعادة التغطية ولا تنتج دخل بفائدة. وبسبب المنافسة مع الجهات المالية المختلفة يتطلب من البنك توزيع على الأقل 40٪ من رأس المال على القروض الزراعية، والقروض التجارية، وللمساعدة في دفع الناس للسكن في المنطقة وإنشاء المنازل فإن القروض السكنية يجب أن تعادل على الأقل 50٪ من القروض الشخصية وقروض السيارات والقروض السكنية، واعتمد البنك سياسة عدم السماح بأن تزيد نسبة الدين لجميع القروض عن 4٪ من جميع القروض.

نوع القرض	معدل الفائدة	نسبة الدين المعدوم
شخصي	0.14	0.1
سيارة	0.13	0.07
سكني	0.12	0.03
زراعي	0.125	0.05
تجاري	0.1	0.02

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية يمثل سياسة الإقراض في البنك بحيث يستطيع تحقيق أكبر عائد ممكن من القروض.

الحل:

إن عائدات البنك تتمثل في الفرق بين المردود بفائدة والخسارة من الدين المعدوم.

متغيرات القرار (بالمليون دينار)

X_1: قروض شخصية.

X_2: قروض سيارات.

X_3: قروض سكن.

X_4: قروض زراعية.

X_5: قروض تجارية.

دالة الهدف

$$\text{Max } Z = 0.14(0.9X_1) + 0.13(0.93X_2) + 0.12(0.97X_3) + 0.125(0.95X_4) + 0.1(0.98X_5) - 0.1X_1 - 0.07X_2 - 0.03X_3 - 0.05X_4 - 0.02X_5$$

وبإجراء عملية الطرح تكون دالة الهدف على النحو الأتي:

$$\text{Max } Z = 0.26X_1 + 0.509X_2 + 0.864X_3 + 0.0688X_4 + 0.078X_5$$

وتتحكم في هذه السياسة القيود التالية:

أ. محدودية رأس المال

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 12$$

ب. القروض الزراعية والتجارية يجب أن تكون على الأقل 40٪ من رأس المال

$$X_4 + X_5 \geq (0.4)12$$
$$X_4 + X_5 \geq 4.8$$

ج. القروض السكنية تعادل على الأقل 50٪ من القروض التجارية والسيارات والسكن.

$$X_3 \geq 0.5(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$0.5X_1 + 0.5X_2 - 0.5X_3 \leq 0$$

د. محدودية الدين المعدوم: نسبته من الدين أقل من 4٪.

نسبة الدين المعدوم = مقدار الدين المعدوم ÷ مقدار القروض وعليه:

$$\frac{0.1X_1 + 0.07X_2 + 0.03X_3 + 0.05X_4 + 0.02X_5}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5} \leq 0.04$$

وبالضرب التبادلي ينتج

$$0.06X_1 + 0.03X_2 - 0.01X_3 + 0.01X_4 - 0.02X_5 \leq 12$$

هـ. قيد عدم السلبية

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 0$$

بناءً على ما سبق، يمكن كتابة الشكل الكلي لنموذج البرمجة الخطية الخاص بسياسة الإقراض على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 0.26X_1 + 0.509X_2 + 0.864X_3 + 0.0688X_4 + 0.078X_5$$

Subject to:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 12$$

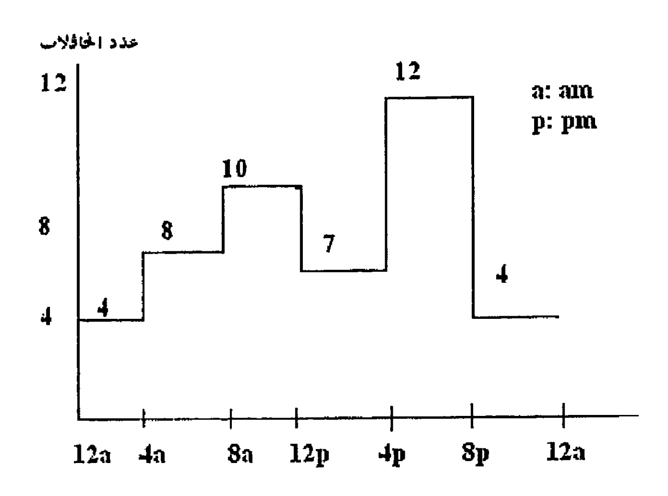
$$X_4 + X_5 \geq 4.8$$

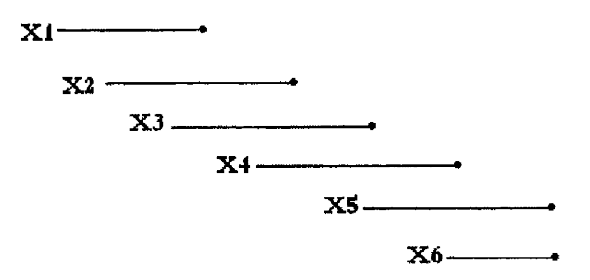
$$0.5X_1 + 0.5X_2 - 0.5X_3 \leq 0$$

$$0.06X_1 + 0.03X_2 - 0.01X_3 + 0.01X_4 - 0.02X_5 \leq 12$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

2. قامت إحدى المدن بدراسة امكانية تقديم نظام لحركة الحافلات يخفف من شدة الازدحام وذلك بهدف تخفيض عدد الحافلات داخل المدينة. الدراسة تتطلب تحديد أقل عدد مكن من الحافلات يكفي لحركة النقل في اليوم. بعد جمع البيانات الضرورية لاحظ المهندسون أن أقل عدد ممكن من الحافلات يتغير خلال ساعات اليوم، ولاحظوا أيضاً أن العدد المطلوب يمكن أن يُقرب إلى قيمة ثابته كل فترة زمنية هي أربع ساعات متتالية. والشكل التالي يلخص ما وصل إليه المهندسون:





الحل:

إذا اعتمدنا برنامج النقل الاعتيادي على النحو

من 8:01 صباحاً إلى 4:00 مساءاً

من 4:01 مساءاً إلى 12:00 منتصف الليل

من 12:01 صباحاً إلى 8:00 صباحاً

وإذا كانت X_1, X_2, X_3 عدد الحافلات المستخدمة في المراحل الثلاث على التوالي فإنه من الشكل تجد أن:

$$X_1 \geq 10, \quad X_2 \geq 12, X_3 \geq 8$$

وعليه يكون أقل عدد ممكن من الحافلات في اليوم هو:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10 + 12 + 8 = 30$$

وهذا العدد مقبول إذا تقيدنا ببرنامج الحركة الاعتيادي ويمثل حل إجرائي وليس الأقل.

أما إذا كان البرنامج غير محدد والهدف هو أفضل بداية في برنامج الحافلات ليحقق أقل عدد ممكن فإن نموذج البرمجة الخطية يكون على النحو الأتي:

X_1: عدد الحافلات التي تبدأ 12:01 صباحاً.

X_2: عدد الحافلات التي تبدأ 4:01 صباحاً.

X_3: عدد الحافلات التي تبدأ 8:01 صباحاً.

X_4: عدد الحافلات التي تبدأ 12:01 مساءاً.

X_5: عدد الحافلات التي تبدأ 4:01 مساءاً.

X_6: عدد الحافلات التي تبدأ 8:01 مساءاً.

ويكون النموذج الخطي على النحو الأتي:

Min $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

Subject to:

$X_1 + X_6 \geq 4$ **{12:01 am → 4:00 am}**

$X_1 + X_2 \geq 8$ **{4:01 am → 8:00 am}**

$X_2 + X_3 \geq 10$ **{8:01 am → 12:00 pm}**

$X_3 + X_4 \geq 7$ **{12:01 pm → 4:00 pm}**

$X_4 + X_5 \geq 12$ **{4:01 pm → 8:00 pm}**

$$X_5 + X_6 \geq 4 \; \{8:01 \text{ pm} \rightarrow 12:00 \text{ pm}\}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 0$$

10.3 أسئلة للمناقشة والمراجعة

1. وضح المقصود بكل مما يلي: البرمجة الخطية، النموذج، النموذج الرياضي.
2. بين أهم مجالات استخدام البرمجة الخطية.
3. ما هي الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية؟
4. تصنف النماذج حسب درجة تمثيلها للمشكلة إلى نوعين، بينهما مع الأمثلة المناسبة.
5. ما هي أصناف حلول مشكلة البرمجة الخطية؟

11.3 تمارين الفصل الثالث

1. تنتج المؤسسة العربية الأردنية لصناعة البرمجيات نوعين من البرمجيات التطبيقية للأغراض التعليمية هما الإداري الناجح، والمحاسب الذكي، ويتطلب إنتاج كل برنامج المرور بثلاث مراحل هي: التحليل والتصميم والبرمجة (التنفيذ) والجدول التالي يبين الزمن اللازم لإنتاج البرنامج الواحد في كل مرحلة.

البرنامج	التحليل (ساعة)	التصميم (ساعة)	البرمجة (ساعة)
الإداري الناجح	12	6	4
المحاسب الذكي	8	6	8

وتخصص المؤسسة شهرياً ما لا يقل عن (60) ساعة عمل لعمليات التحليل، و لا يقل عن (80) ساعة عمل لعمليات التصميم، ولا يزيد عن (100) ساعة عمل مخصصة لعمليات البرمجة، وكان الطلب على برنامج الإداري الناجح محدد بـ (100) برنامج شهرياً، أما الطلب المتوقع على برنامج المحاسب الذكي فيقدر بـ (200) برنامج شهرياً، وقد قدرت المؤسسة تكلفة النسخة الواحدة من برنامج الإداري الناجح بـ

(280) دينار، أما تكلفة النسخة الواحدة من برنامج المحاسب الذكي فقد قدرت بـ (300) دينار، وتباع النسخة الواحدة من كل برنامج بـ (500) دينار، وترغب المؤسسة في الاستفادة من الطلب المتزايد على هذا النوع من البرامج لتعظيم أرباحها ما هو عدد البرامج التي يجب أن تنتجها المؤسسة لتعظيم أرباحها.

2. تنتج الشركة الوطنية للأثاث الفاخر نوعين من المكاتب، الملوكي، والرئاسي، ويوجد لدى الشركة (**90**) ساعة لأعمال القص والتركيب، و(**60**) ساعة لأعمال الإنهاء، و(**80**) ساعة لأعمال التغليف والنقل، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المكتبين، بالإضافة إلى الربح المتوقع من كل نوع من المكاتب.

النوع	قص وتركيب	إنهاء	تغليف ونقل	الربح التوقع
الملوكي	1	2	4	100
الرئاسي	3	6	5	70

افترض أن الشركة ترغب في تعظيم أرباحها الكلية، ما هو نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟

3. تنتج إحدى الشركات الأردنية لإنتاج الالكترونيات نوعين من الشرائح الالكترونية هما: X & Y، وتستخدم الشركة لإنتاجها خطي إنتاج أحدها قديم والأخر حديث، كلا المنتجين يمكن أنتاجهما بأقل التكاليف عند استخدام خط الإنتاج الحديث، إلا أن خط الإنتاج الحديث لا يمتلك الطاقة التي تمكنه من معالجة الإنتاج الكلي، لذلك يستخدم خط الإنتاج القديم لمعالجة بعض الكميات من الإنتاج، والجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بكل من متطلبات الإنتاج الكلي، طاقة خطي الإنتاج، وتكاليف الإنتاج:

المنتج	تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة		
	الخط القديم	الخط الحديث	المتطلبات الدنيا من الإنتاج
X	5 دينار	3 دينار	500
Y	4 دينار	2.5 دينار	700
طاقة خط الإنتاج	600	800	

4. ملاك للأوراق المالية، شركة استثمارية أردنية تمتلك (400.000) دينار في حسابها لدى أحد البنوك في الأردن. يرغب السيد خالد وليد مدير عام الشركة في إعادة استثمار المبلغ المذكور في محفظة مالية يمكن أن تحقق للشركة أعلى عائد على الاستثمار، وبنفس الوقت إيجاد مزيج استثماري "وقائي" من الأسهم والسندات. الجدول الأتي يبين الفرص الاستثمارية الممكنة ومعدل العائد من كل فرصة استثمارية:

الفرصة الاستثمارية	معدل العائد
سندات حكومية	0.095
سهم شركة الإسراء	0.146
سهم بنك الشمال	0.075
سندات محلية	0.070

قرر مجلس إدارة الشركة بأن لا يقل الاستثمار في السندات عن 60٪، و25٪ تخصص للاستثمار في سهم بنك الشمال، كما قرر مجلس الإدارة بأن لا يزيد الاستثمار في سهم شركة الإسراء عن 15٪. **المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.**

5. تنتج مجموعة الليث لصناعة الحواسيب الشخصية أربعة أنواع من الحواسيب هي: الأستاذ، الصديق، المدير، والسريع. الجدول التالي يبين الربح، ومتطلبات إنتاج كل حاسوب شخصي.

	الأستاذ	الصديق	المدير	السريع	المجموع
Labor (hr)	5	5	6	8	4000
Chassis (unit)	1	1	1	1	400
Disk Drive (unit)	2	1	2	1	300
Hard Disk (unit)	0	0	0	1	20
Memory Chip (unit)	16	8	32	64	22000
Circuit (unit)	1	1	2	4	10000
Profit (unit)	500	350	700	1000	--------

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.

6. يرغب المستثمر احمد سمير في استثمار جزء من أمواله في سوق الأسهم والسندات، حيث أن العائد المتوقع من السند هو (**10٪**)، والعائد المتوقع من السهم (**6٪**)، إذا علمت بأن السيد احمد يرغب في استثمار ما لا يقل عن (**50٪**) من المال المخصص في السندات، ويرغب أيضاً في اختيار خليط (أسهم وسندات) يمكنه من إيجاد عائد كلي لا يقل عن (**10٪**).

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.

7. تنتج إحدى الشركات الأردنية لإنتاج الالكترونيات نوعين من الشرائح الالكترونية هما: X & Y، وتستخدم الشركة لإنتاجها آلتين مختلفتين: الأولى متوافرة يومياً لمدة (15) ساعة، والآلة الثانية لمدة (10) ساعات، أما الوقت بالساعة الذي يحتاجه إنتاج كل نوع من الشرائح على الآلتين، والعائد الحاصل من إنتاج كل وحدة فهو مبين في الجدول التالي:

المنتج	الآلة الأولى	الآلة الثانية	العائد (دينار)
X	2	2	40
Y	5	1	10

لأسباب معينة يجب أن لا تقل الكميات المنتجة من الشريحة X عن (2)، ومجموع الكميات المنتجة من X & Y عن (4)

المطلوب:

بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة لمساعدة الشركة في عملية اتخاذ القرار المناسب بشأن رفع العائد الإجمالي من إنتاج الشرائح الالكترونية.

8. تقوم الشركة الوطنية لصناعة زيوت المحركات بإنتاج نوعين من الزيوت هما: I، وII، وتستعمل الشركة لصناعة هذين النوعين مادتين أساسيتين هما: A، وB، والحد الأقصى المتوفر من المادة A 12 طناً يومياً، في حين يتوافر من المادة B 16 طناً

يومياً كحد أقصى. والحاجة اليومية للمواد الخام (بالطن) اللازمة للنوعين I ، وII، بالإضافة إلى السعر والتكاليف من بيع وإنتاج الطن الواحد لكلا النوعين مبينة في الجدول الأتي:

المواد	الزيوت	
	I	II
A	2	4
B	4	2
السعر	20	16
التكلفة	8	8

تبين من الدراسة أن الطلب على النوع I لا يتجاوز بأي حال من الأحوال 3 أطنان عن الطلب على النوع II ، وأن الطلب على النوع II لا يتجاوز طنين يومياً.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.

9. يمتلك المستثمر احمد سمير **(10000)** دينار، ويريد استثمارها في سوق الأسهم والسندات، حيث أن العائد المتوقع من السند **(X1)** هو ضعف العائد المتوقع من السهم **(X2)**، إذا علمت بأن السيد احمد يرغب في استثمار ما لا يقل عن **(50٪)** من المال المخصص في السندات، و ما لا يقل عن **(20٪)** من المال المخصص في الأسهم.

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.

10. تنتج الشركة الأردنية لإنتاج العلف الحيواني ثلاثة أنواع من العلف هي A، B، وC. يتكون كل نوع من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة. والجدول التالي يبين التكلفة والاحتياجات الأسبوعية.

نوع المادة الداخلة في تركيب العلف	نوع العلف			الاحتياجات الأسبوعية (كغم)
	A	B	C	
1	1	4	2	1500
2	2	2	1	300
3	4	1	1	800
4	3	2	1	280
5	1	0.75	0.5	187
تكلفة الوحدة الواحدة	15	25	30	

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.

.11 حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Min $Z = 6X_1 + 5X_2$

Subject to

$2X_1 + 2X_2 \geq 100$

$1X_1 \leq 60$

$-X_1 + 2X_2 \geq 0$

$1X_2 \leq 40$

$X_1 , X_2 \geq 0$

.12 حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Max $Z= 5X_1 + 10X_2$

ST

$2X_1 + 2X_2 \geq 240$

$1X_1 \leq 160$

$1X_1 - 2X_2 \leq 80$

$1X_2 \leq 60$

$X_1, X_2 \geq 0$

13. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Max $Z= 7X_1 + 5X_2$

ST

$2X_1 + 1X_2 \leq 100$

$4X_1 + 3X_2 \leq 240$

$X_1, X_2 \geq 0$

14. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Min $Z= 7X_1 + 5X_2$

ST

$2X_1 + 4X_2 \geq 16$

$4X_1 + 3X_2 \leq 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

15. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Min $Z= 5X_1 + X_2$

ST

$1X_1 + 3X_2 \leq 12$

$X_1 \geq 6$

$3X_1 + 4X_2 = 24$

$X_1, X_2 \geq 0$

16. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني

Min $Z= 3000X_1 + 1000X_2$

ST

$60X_1 + 20X_2 \geq 1200$

$10X_1 + 10X_2 \geq 400$

$40X_1 + 60X_2 \geq 2400$

$X_1, X_2 \geq 0$

17. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني، وفسر النتيجة

Max $Z = 60X_1 + 90X_2$

ST

$60X_1 + 30X_2 \leq 1500$

$100X_1 + 100X_2 \geq 6000$

$X_2 \geq 30$

$X_1, X_2 \geq 0$

18. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل البياني، وفسر النتيجة

Max $Z = 110X_1 + 75X_2$

ST

$2X_1 + 1X_2 \geq 40$

$-6X_1 + 8X_2 \leq 120$

$70X_1 + 105X_2 \geq 2100$

$X_1, X_2 \geq 0$

12.3 مصادر الفصل الثالث

1. البلخي، زيد تميم (2007). مقدمة في بحوث العمليات. (ط2)، المملكة العربية السعودية، الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.
2. الطراونة، محمد، وعبيدات، سليمان (2009). مقدمة في بحوث العمليات. الأردن، عمان: دار المسيرة للنشر والتوزيع.
3. العبيدي، محمود، والفضل، مؤيد عبد الحسين (2004). بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.
4. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., & Williams, Thomas A. (2004). **An Introduction to Management Science**. (11th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company.
5. Bixby, R E. (2002). Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress, ***Operations Research***, 50(1): 3-15, Jan-Feb
6. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill..
7. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
8. Taha, Hamdy A., (2007). **Operations Research: An Introduction**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc. .
9. Taylor III, Bernard W. (2007). **An Introduction to Management Science**. (9th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
10. Vanderbei, R. J. (2001). **Linear Programming: Foundations and Extensions**. (2ed ed.), USA, Boston, MA: Kluwer Academic Publisher.

الفصل الرابع

البرمجة الخطية: طريقة الحل المبسطة

Linear Programming: Simplex Solution Method

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد دراسة هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة القياسية.
2. استخدام طريقة الحل المبسطة في حل مشاكل البرمجة الخطية.
3. تحليل وتفسير معنى كل رقم في جدول طريقة الحل المبسطة.
4. تمييز الحالات الخاصة في البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل المبسطة.

الفصل الرابع

البرمجة الخطية: طريقة الحل المبسطة

Linear Programming: Simplex Solution Method

1.4 المقدمة

تعرفنا في الفصل السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها منظمات الأعمال تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار، لذلك لا بد من استخدام طريقة أخرى اشمل وأسهل من طريقة الحل البياني، وهي طريقة الحل المبسطة التي تعتبر من أهم الطرق المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية المعقدة والتي تحتوي على أكثر من متغيرين وتمتاز هذه الطريقة بالدقة العالية، وبأنها تتضمن مجموعة من المراحل التي من خلالها يتحسن الحل الأولي وصولاً إلى الحل الأمثل.

أصبحت كفاءة استخدام الطريقة المبسطة وغيرها من نماذج بحوث العمليات أو الأساليب الكمية عالية بفضل توفر العديد من البرمجيات التطبيقية الجاهزة.

إن أهمية الطريقة المبسطة لا تنبع من كونها تساعد في الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة موضوع البحث، وبالتالي الوصول إلى أعلى الأرباح أو اقل التكاليف فحسب، وإنما من كونها تعطي معلومات إضافية مهمة.

2.4 آلية عمل طريقة الحل المبسطة

المرحلة الأولى: تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة القياسية أو المعيارية Standard Form وذلك على النحو التالي:

1. تحويل القيود Constraints في نموذج البرمجة الخطية إلى معادلات كالأتي:

أ- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي (≥) يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى "المتغير الزائد" أو "المتغير الراكد" Slack Variable ويرمز له بالرمز (Si; i = 1, 2, 3, ..., n) ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف.

ب- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي (≤) يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى "المتغير الفائض" Surplus Variable ويرمز له بالرمز (Si ; i = 1, 2, 3, ..., n) ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي Artificial Variable إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، ويظهر المتغير الفائض بمعامل صفر في دالة الهدف، أما المتغير الوهمي فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة (+M) عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل (**Minimization**)، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم (**Maximization**) فإن إشارة (M) تكون سالبة (-M).

ج- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي Artificial Variable إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai). والجدول (3-1) يبين القواعد السابقة:

الجدول (4- 1) قواعد تحويل القيود في نموذج البرمجة الخطية إلى معادلات

إشارة القيد	الإجراء	دالة الهدف تخفيض (**Min**)	دالة الهدف تعظيم (**Max**)
أقل من أو يساوي (≥)	+1Si	+0Si	+0Si
أكبر من أو يساوي (≤)	-1Si + 1Ai	0Si + MAi	0Si - MAi
يساوي (=)	+ 1Ai	+ MAi	- MAi

2. إعادة كتابة دالة الهدف في ضوء المتغيرات الجديدة التي دخلت إلى نموذج البرمجة الخطية مع الأخذ بعين الاعتبار معامل المتغير وكيفية ظهوره في دالة الهدف.

المرحلة الثانية: تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل القياسي أو المعياري في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول (3- 2).

الجدول (4- 2): جدول الحل الأولي **Initial Simplex Tableau**

C ⟶	C_j	0	± M*	الطرف الأيمن للقيد
الحل الأساسي	X_j	S_i	A_i	RHS
عمود المتغيرات الأساسية Basic Variables	معاملات المتغيرات في القيد الأول			b_1
	معاملات المتغيرات في القيد الثاني			.
	...			.
	معاملات المتغيرات في القيد n			b_n
Z	Z_1	...	Z_{n-1}	Z_n
C - Z	$C_1 - Z_1$	...	$C_n - Z_{n-1}$	

❖ توضع الإشارة حسب طبيعة دالة الهدف

ملاحظات على جدول الحل الأولي:

1. توضع جميع المتغيرات الزائدة أو الراكدة (Slack) كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي، أما المتغيرات الفائضة (Surplus) فلا توضع كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي، كما أن جميع المتغيرات الوهمية أو الاصطناعية (Artificial) توضع كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي.

2. يمثل العمود الأيمن من جدول الحل الأولي الكميات أو الطرف الأيمن Right Hand Side للقيود أو للمعادلات في الصيغة القياسية (المعيارية).

3. يمثل صف (**Z**) إجمالي الربح أو التكلفة، حسب طبيعة دالة الهدف، ويتم احتسابه على النحو الأتي:

(معامل المتغير الأساسي الأول × معامل X_1 في القيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني × معامل X_1 في القيد الثاني) + ... + (معامل المتغير الأساسي الأخير (n) × معامل X_1 في القيد الأخير(n)).

وهكذا بالنسبة لجميع المتغيرات الموجودة في دالة الهدف.

4. يمثل صف (C - Z) صافي الربح أو التكلفة، حسب طبيعة دالة الهدف، ويسمى "صف تقييم الحل" ويتم احتسابه على النحو الأتي:

معامل المتغير في دالة الهدف – قيمة (Z) المقابلة له في صف (Z)، فمثلاً قيمة (C - Z) للمتغير(X_1) هي: ($C_1 - Z_1$).

المرحلة الثالثة: التحقق من أمثلية الحل، وذلك من خلال فحص قيم الصف (C - Z) والذي يعبر عن مدى مساهمة كل متغير من متغيرات دالة الهدف عند إضافة وحدة واحدة، ويتم التقييم على النحو الأتي:

أ- إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فإن الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم الصف (C - Z) أقل من أو تساوي صفر ($C - Z \leq 0$)، أي سالبة أو أصفار.

ب- إذا كانت دالة الهدف تقليل (Min) فإن الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم الصف (C - Z) أكبر من أو تساوي صفر ($C - Z \geq 0$)، أي موجبة أو أصفار.

وفي حالة تحقق شرط الأمثلية يتم التوقف عند هذه المرحلة ويكون الحل المتحقق الحل الأمثل، وإذا لم يتحقق شرط الأمثلية يتم الانتقال إلى المرحلة الرابعة.

المرحلة الرابعة: تحديد المتغير الداخل إلى الحل الأساسي Entering Variable، والمتغير الخارج من الحل الأساسي Leaving Variable.

أ- تحديد المتغير الداخل إلى الحل الأساسي Entering Variable يتم على أساس قيم صف تقييم الحل (C - Z) فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة موجبة في صف (C - Z) ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود

المحوري Pivot Column، أما إذا كانت دالة الهدف تقليل أو تخفيض (Min) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة (بإشارة سالبة) في صف (C - Z) ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري Pivot Column.

ب- تحديد المتغير الخارج من الحل الأساسي Leaving Variable عن طريق قسمة قيم عمود الكميات (الطرف الأيمن للقيود (RHS)) على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (الارتكاز)، ويكون المتغير الخارج من الحل الأساسي هو المتغير الذي يقابل أقل حاصل قسمة (نسبة) موجب بغض النظر عن طبيعة دالة الهدف، ويسمى الصف الذي يقع فيه المتغير الخارج من الحل الأساسي بالصف المحوري أو صف الارتكاز Pivot Row، ويسمى العنصر الذي يتقاطع عنده العمود المحوري (الارتكاز) مع الصف المحوري (الارتكاز) بالعنصر المحوري أو عنصر الارتكاز Pivot Number.

المرحلة الخامسة: يتم تعديل جدول الحل الأولي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التحسينات أو التعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحل الأولي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحل الأولي، وتتلخص إجراءات تكوين الجدول الجديد بما يلي:

1. تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف المحوري على العنصر المحوري، ويسمى الصف الناتج بصف العمل Working Row.

2. تحتسب قيم الصفوف الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

قيم الصف الجديدة = القيمة الحالية (القديمة) للصف - [الرقم المناظر للرقم المحوري × الرقم المقابل في صف العمل].

الرقم المناظر للرقم المحوري: هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى الرقم المحوري.

أيضا يمكن إيجاد قيم الصفوف الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

قيم الصف الجديدة = القيمة الحالية (القديمة) للصف - [(العنصر المقابل لها في الصف المحوري × العنصر المقابل لها في العمود المحوري) / العنصر المحوري].

وبعد الانتهاء من عملية الحساب تتم عملية اختبار أمثلية الحل كما مر في المرحلة الثالثة.

ويمكن توضيح هذه المراحل من خلال المثال التالي:

مثال (4- 1): تقوم مؤسسة مجد الدين لصناعة البرمجيات بإنتاج ثلاثة أنواع من البرمجيات التطبيقية للأغراض التعليمية هي: المترجم الفوري، والإداري الناجح، والمحاسب الذكي، وجميعها تمر بثلاثة مراحل إنتاجية هي التحليل، التصميم، والبرمجة (التنفيذ)، والجدول التالي يلخص الساعات التي يتطلبها إنتاج كل وحدة من البرمجيات الثلاثة في كل مرحلة من مراحل الإنتاج، أيضاً الربح المتوقع من كل برنامج.

البرنامج	العمليات الإنتاجية (ساعة)			الربح دينار / برنامج
	تحليل	تصميم	برمجة	
المترجم الفوري	2	2	4	40
الإداري الناجح	5	5	2	30
المحاسب الذكي	10	3	2	20
أقصى زمن متوفر	90	40	60	

المطلوب:

ما هو عدد البرمجيات الواجب تجهيزها من كل نوع لتمكين المؤسسة من تحقيق أعلى ربح ممكن؟

في البداية يتم بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة وفقاً لمتغيرات القرار التالية:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من برنامج المترجم الفوري.

X_2: عدد الوحدات المنتجة من برنامج الإداري الناجح.

X_3: عدد الوحدات المنتجة من برنامج المحاسب الذكي.

نموذج البرمجة الخطية الممثل لهذه المشكلة يكون على النحو التالي:

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

ST.

$$2X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 90$$

$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 40$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 60$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل القياسي (الصيغة المعيارية)

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 30X_2 + 20X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \text{ ST.}$$

$$2X_1 + 5X_2 + 10X_3 + S_1 = 90$$

$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 + S_2 = 40$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_3 = 60$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

2. في ضوء معطيات النموذج القياسي (المعياري) يتم تكوين جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي

جدول (4- 3): جدول الحل الأولي

Max	40	30	20	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الكميات
0 S_1	2	5	10	1	0	0	90
0 S_2	2	5	3	0	1	0	40
0 S_3	4	2	2	0	0	1	60
Z	0	0	0	0	0	0	0
C - Z	40	30	20	0	0	0	

ونلاحظ من جدول الحل الأولي ما يلي:

أ- إن الحل الأساسي أو المتغيرات الأساسية **Basic Solution** في جدول الحل الأولي تتمثل بوجود المتغيرات الزائدة (الراكدة) في الحل، أي أن قيمة دالة الهدف تساوي صفر، وقيم المتغيرات الزائدة (الراكدة) هي:

$$S_1 = 90, S_2 = 40, S_3 = 60..$$

وهذا يدل على عدم استغلال الطاقات الإنتاجية بالكامل، أي أن العملية الإنتاجية لم تبدأ بعد، وهذا يعني أن عدد الوحدات المنتجة من كل برنامج عند هذه المرحلة يساوي صفر.

ب- يتم استخراج قيم صف **Z** كما يلي:

$$Z_1 = (0)*(2) + (0)*(2) + (0)*(4) = 0$$

$$Z_2 = (0)*(5) + (0)*(5) + (0)*(2) = 0$$

$$Z_3 = (0)*(10) + (0)*(3) + (0)*(2) = 0$$

$$Z_4 = (0)*(1) + (0)*(0) + (0)*(0) = 0$$

$$Z_5 = (0)*(0) + (0)*(1) + (0)*(0) = 0$$

$$Z_6 = (0)*(0) + (0)*(0) + (0)*(1) = 0$$

$$Z_7 = (0)*(90) + (0)*(40) + (0)*(60) = 0$$ قيمة دالة الهدف

ت- يتم استخراج قيم صف (C - Z) كالآتي:

(معامل المتغير في دالة الهدف) – (قيمة (Z) المقابلة له في صف **Z**، فمثلاً معامل المتغير (X_1) في دالة الهدف = (40)، وقيمة (Z) المقابلة له في صف **Z** = (0)، لذا فإن

$$C - Z = (40) – (0) = 40$$

وهكذا بالنسبة لبقية القيم

ث- قيمة دالة الهدف تتمثل بقيمة (Z) التي تقع تحت عمود الكميات RHS وتساوي صفر.

التحقق من الحل من خلال صف تقييم الحل (C - Z) في الجدول (3- 3) حيث نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، لذالك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فإن المتغير الذي سيدخل الحل الأساسي هو المتغير الذي قيمة (C - Z) المقابلة له أغلى قيمة موجبة، لأنها تعطي أعلى مساهمة في الربح وهو المتغير(X_1) الذي قيمة (C - Z) المقابلة له تساوي (40) وهي أعلى قيمة موجبة في صف (C - Z) وبالتالي فإن (X_1) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود المحوري أو عمود الارتكاز.

ولتحديد المتغير الذي سيغادر الحل نقسم قيم عمود الكميات على القيم المقابلة لها في العمود المحوري (عمود الارتكاز) وكما يلي:

الكميات	÷	قيم العمود المحوري	ناتج حاصل القسمة (النسبة) Ratio
90	÷	2	= 45
40	÷	2	= 20
60	÷	4	= 15

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (15) وبذلك فإن (S_3) هو المتغير الخارج منن الحل الأساسي وصفه هو الصف المحوري أو صف الارتكاز، وأن الرقم (4) هو العنصر المحوري (عنصر الارتكاز) لأنه يمثل نقطة تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري، كما هو مبين في الجدول (3- 4).

جدول (4- 4): العمود المحوري، والصف المحوري، والرقم المحوري

Max	40	30	20	0	0	0	RHS الكميات	Ratio
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0 S_1	2	5	10	1	0	0	90	45
0 S_2	2	5	3	0	1	0	40	20
0 S_3	4	2	2	0	0	1	60	15
Z	0	0	0	0	0	0	0	
C - Z	40	30	20	0	0	0		

العمود المحوري   الرقم المحوري   الصف المحوري

4. نقوم بإجراء التعديل الثاني عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

أ- تكوين "صف العمل" الخاص بالمتغير الذي دخل الحل، وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري

قيم صف العمل = قيم الصف المحوري ÷ العنصر المحوري، وعليه فإن قيم صف العمل X_1 تكون على النحو الأتي:

Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	RHS
قيم صف العمل X_1	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{60}{4}$
	1	0.5	0.5	0	0	0.25	15

ب- تكوين الصف الأول (S_1) في جدول التعديل الثاني

قيم صف (S_1) الجديدة = قيم صف (S_1) القديمة – (الرقم المقابل للرقم المحوري في صف (S_1) * الرقم المقابل في صف العمل)

$2 - (2*1) = 0$

$5 - (2*0.5) = 4$

$10 - (2*0.5) = 9$

$1 - (2*0) = 1$

$0 - (2*0) = 0$

$0 - (2*0.25) = -0.5$

$90 - (2*15) = 60$

ج- تكوين الصف الثاني (S_2) في جدول التعديل الثاني بنفس الطريقة ونحصل على:

$2 - (2*1) = 0$

$5 - (2*0.5) = 4$

$3 - (2*0.5) = 2$

$0 - (2*0) = 0$

$1 - (2*0) = 1$

$0 - (2*0.25) = -0.5$

$40 - (2*15) = 10$

د- يتم احتساب قيم صف **Z** كما يلي:

$Z_1 = (0)*(0) + (0)*(0) + (40)*(1) = 40$

$Z_2 = (0)*(4) + (0)*(4) + (40)*(0.5) = 20$

$Z_3 = (0)*(9) + (0)*(2) + (40)*(0.5) = 20$

$Z_4 = (0)*(1) + (0)*(0) + (40)*(0) = 0$

$Z_5 = (0)*(0) + (0)*(1) + (40)*(0) = 0$

$Z_6 = (0)*(-0.5) + (0)*(-0.5) + (40)*(0.25) = 10$

$Z_7 = (0)*(60) + (0)*(10) + (40)*(15) = 600$ قيمة دالة الهدف

٥-   يتم حساب قيم صف (C - Z) كالآتي:

(معامل المتغير في دالة الهدف) – (قيمة (Z) المقابلة له في صف Z

$$C_1 - Z_1 = (40) - (40) = 0$$

$$C_2 - Z_2 = (30) - (20) = 10$$

$$C_3 - Z_3 = (20) - (20) = 0$$

$$C_4 - Z_4 = (0) - (0) = 0$$

$$C_5 - Z_5 = (0) - (0) = 0$$

$$C_6 - Z_6 = (0) - (10) = -10$$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على جدول التعديل الأول التالي

جدول (4- 5): جدول التعديل الأول

Max		40	30	20	0	0	0	RHS الكميات
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	4	9	1	0	-0.5	60
0	S_2	0	4	2	0	1	-0.5	10
40	X_1	1	0.5	0.5	0	0	0.25	15
Z		40	20	20	0	0	10	600
C - Z		0	10	0	0	0	-10	

5.   يتم تقييم أمثلية الحل من خلال قيم صف (C - Z)، حيث نلاحظ وجود قيمة موجبة تحت المتغير (X_2)، وهذا يدل على أن الحل الحالي لا يمثل الحل الأمثل، لذلك نقوم بتكرار الخطوات الأربع التي أجريت على جدول الحل الأولي، حيث يتحدد (X_2) كمتغير داخل لأنه يمتلك أعلى قيمة موجبة في صف (C - Z) ويكون عموده هو العمود المحوري، بعده نقسم قيم عمود الكميات (RHS) على قيم العمود المحوري المناظرة لها فنحصل على النسبة التي على أساسها يتحدد المتغير الذي سيغادر الحل، وعلى النحو الآتي:

الكميات	÷	قيم العمود المحوري	Ratio (النسبة)
60	÷	4	= 15
10	÷	4	= 2.5
15	÷	0.5	= 30

وكما نلاحظ فإن أقل نسبة موجبة هي (2.5) وبذلك فإن (S_2) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه هو الصف المحوري، وأن الرقم (4) هو العنصر المحوري لأنه يمثل نقطة تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري، كما هو مبين في الجدول (4- 6) التالي:

جدول (4- 6): المتغير الداخل للحل والمتغير الخارج من الحل الأساسي

	Max	40	30	20	0	0	0	RHS الكميات	Ratio
	Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
	0 S_1	0	4	9	1	0	-0.5	60	15
خارج	0 S_2	0	4	2	0	1	-0.5	10	2.5
	40 X_1	1	0.5	0.5	0	0	0.25	15	30
	Z	40	20	20	0	0	10	600	
	C - Z	0	10	0	0	0	-10		

داخل

وتتم عملية حساب الصفوف الجديدة بنفس القواعد السابقة، فنحصل على جدول التعديل الثاني التالي:

جدول (4- 7): جدول التعديل الثاني

Max	40	30	20	0	0	0	RHS الكميات
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	0	0	7	1	-1	0	50
30 X_2	0	1	0.5	0	0.25	-0.125	2.5
40 X_1	1	0	0.25	0	-0.125	0.3125	13.75
Z	40	30	25	0	2.5	8.75	625
C - Z	0	0	-5	0	-2.5	-8.75	

نقوم بتقييم الحل للجدول الثالث من خلال قيم صف (**C - Z**)، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أقل من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل الحل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

- عدد الوحدات المنتجة من (X_1) والذي يمثل برنامج المترجم الفوري = 13.75 برنامج.
- عدد الوحدات المنتجة من (X_2) والذي يمثل برنامج الإداري الناجح = 2.5 برنامج.
- عدد الساعات الزائدة (الخاملة) = 50 ساعة عمل لعمليات التحليل

ملاحظة: للحصول على قيم صحيحة يمكن الرجوع إلى موضوع البرمجة بأرقام صحيحة Integer Programming من أي مقرر بحوث عمليات أو أساليب كمية.

3.4 تطبيق طريقة الحل المبسطة على مشكلة التقليل

Minimization Problem

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق الطريقة المبسطة (أسلوب M الكبرى Big M Technique) على مشكلة التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من السلع.

مثال (3- 2): تنتج مؤسسة المأمون لصناعة الإلكترونيات نوعين من المنتجات هما: A وB، يتطلب إنتاج كل منتج المرور في مرحلتين، ويوجد لدى الشركة على الأقل (**6**) ساعات يومياً لأعمال المرحلة الأولى، و لا يقل عن (**4**) ساعات في اليوم الواحد مخصصة لأعمال المرحلة الثانية، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتجين، بالإضافة إلى تكلفة إنتاج كل منتج.

المنتج	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	التكلفة
A	1	3	3
B	1	3	4

افترض أن الشركة ترغب في تخفيض تكاليفها الكلية، ما هي الكميات التي تنتجها من كل نوع.

الحل:

يتم أولاً بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، وعلى النحو الأتي:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2$$

ST.

$$1X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$1X_1 + 1X_2 \geq 4$$

$$X_1 . X_2 \geq 0$$

حيث: X_1 تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج **A**

X_2 تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج **B**

ولحل هذه المشكلة باستخدام طريقة الحل المبسطة، نتبع الخطوات التالية:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل القياسي (الصيغة المعيارية) حسب ما تمت الإشارة إليه سابقاً.

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ST.

$$1X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 6$$

$$1X_1 + 1X_2 - S_2 + A_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

ويلاحظ من الشكل القياسي أعلاه ما يلي:

- متغيرات القرار Decision Variables هي: $X_1 . X_2$.
- المتغيرات الفائضة Surplus Variables هي: S_1, S_2.
- المتغيرات الوهمية أو الاصطناعية Artificial Variables هي: A_1, A_2

- معامل المتغير الوهمي في دالة الهدف هو (Big M)، وهو عدد كبير جداً ويحمل إشارة موجبة في حال كانت دالة الهدف تقليل أو تخفيض (Minimization)، وإضافة (Big M) تساعد في إخراج المتغيرات الوهمية من الحل الأمثل.

2. تكوين جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي، وبنفس القواعد المشار إليها سابقاً.

(4- 8) جدول الحل الأولي (الأساسي) لمشكلة شركة المأمون

Min	3	4	0	M	0	M	RHS	Ratio
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2		
M A_1	1	3	-1	1	0	0	6	2
M A_2	1	1	0	0	-1	1	4	4
Z	2M	4M	-M	M	-M	M	10M	
C - Z	3-2M	4-4M	M	0	M	0		

يلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات الوهمية، ونشير هنا بأنه إذا اجتمع في الشكل القياسي قيدين أحدها بمتغير وهمي، والآخر بمتغير خامل (زيادة)، يكون المتغير الوهمي والمتغير الخامل هما المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأولي، أي أن المتغيرات الفائضة لا تكون ضمن المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأولي بغض النظر عن طبيعة دالة الهدف.

3. نختبر أمثلية الحل من خلال صف تقييم الحل (C - Z) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التقليل مشروط بأن تكون جميع قيم صف (C - Z) أكبر من أو تساوي صفر ($C - Z \geq 0$).

4. نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، وبما أن دالة الهدف تقليل

(Min) فإن المتغير الذي سيدخل الحل الأساسي هو المتغير الذي قيمة (C - Z) المقابلة له أعلى قيمة (بإشارة سالبة)، لأنها تعطي أعلى مساهمة في تخفيض التكاليف الكلية وهو المتغير(X_2) الذي قيمة (C - Z) المقابلة له تساوي (4-4M) وهي أعلى قيمة (بإشارة سالبة) في صف (C - Z) وبالتالي فإن (X_2) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود المحوري كما هو مبين في الجدول (3- 8).

ولتحديد المتغير الذي سيغادر الحل نقسم قيم عمود الكميات على القيم المقابلة لها في العمود المحوري وكما يلي:

الكميات	÷	قيم العمود المحوري	Ratio (النسبة)
6	÷	3	= 2
4	÷	1	= 4

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (2) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه هو الصف المحوري أو صف الارتكاز، وأن الرقم (3) هو العنصر المحوري (عنصر الارتكاز) لأنه يمثل نقطة تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري، كما هو مبين في الجدول (4- 8).

5. نقوم بإجراء التعديل الأول عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

أ. تكوين "صف العمل" الخاص بالمتغير الذي دخل الحل، وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على العنصر المحوري

قيم صف العمل = قيم الصف المحوري ÷ العنصر المحوري

Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	RHS
قيم صف العمل X_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{6}{3}$
	1/3	1	-1/3	1/3	0	0	2

ب. تكوين الصف الثاني (A_2) في جدول التعديل الأول

قيم صف (A_2) الجديدة = قيم صف (A_2) القديمة – (الرقم المقابل للرقم المحوري في صف (A_2) * الرقم المقابل في صف العمل)

$1 - (1*1/3) = 2/3$

$1 - (1*1) = 0$

$0 - (1*-1/3) = 1/3$

$0 - (1*1/3) = -1/3$

$-1 - (1*0) = -1$

$1 - (1*0) = 1$

$4 - (1*2) = 2$

د. يتم احتساب قيم صف **Z** كما يلي:

$Z_1 = (4)*(1/3) + (M)*(2/3) = 4/3 + 2M/3$

$Z_2 = (4)*(1) + (M)*(0) = 4$

$Z_3 = (4)*(-1/3) + (M)*(1/3) = -4/3 + 1M/3$

$Z_4 = (4)*(1/3) + (M)*(-1/3) = 4/3 - 1M/3$

$Z_5 = (4)*(0) + (M)*(-1) = -M$

$Z_6 = (4)*(0) + (M)*(1) = M$

$Z_7 = (4)*(2) + (M)*(2) = 8+2M$ قيمة دالة الهدف

هـ. يتم حساب قيم صف (**Z - C**) كالآتي:

(معامل المتغير في دالة الهدف) – (قيمة (Z) المقابلة له في صف **Z**

$C_1 - Z_1 = (3) - (4/3+2M/3) = 5/3-2M/3$

$C_2 - Z_2 = (4) - (4) = 0$

$C_3 - Z_3 = (0) - (-4/3 + 1M/3) = 4/3-1M/3$

$C_4 - Z_4 = (M) - (4/3 - 1M/3) = -4/3+4M/3$

$C_5 - Z_5 = (0) - (-M) = M$

$C_6 - Z_6 = (M) - (M) = 0$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على جدول التعديل الأول التالي:

جدول (4- 9) جدول التعديل الأول لمشكلة شركة المأمون

Min	3	4	0	M	0	M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
4 X_2	1/3	1	-1/3	1/3	0	0	2
M A_2	2/3	0	1/3	-1/3	-1	1	2
Z	4/3+2M/3	4	-- 4/3+1M/3	4/3-1M/3	- M	M	8+2M
C - Z	5/3-2M/3	0	4/3-1M/3	-4/3+4M/3	M	0	

نختبر أمثلية الحل في جدول التعديل الثاني فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير (X_1)، ويكون المتغير الداخل (X_1)، وعموده هو العمود المحوري. ثم نحدد المتغير الخارج من الحل الأساسي كما مر سابقاً فيكون (A_2) وصفه هو الصف المحوري، ويكون الرقم ($\frac{20}{3}$) هو الرقم المحوري.
وبناء على هذا تتم عملية إعادة بناء الجدول الجديد (التعديل الثاني)، فيكون لدينا الجدول (4- 10) التالي:

جدول (4- 10) جدول التعديل الثاني (الحل الأمثل) لمشكلة شركة المأمون

Min	3	4	0	M	0	M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
4 X_2	0	1	-0.5	0.5	0.5	-0.5	1
3 X_1	1	0	0.5	-0.5	-3/2	3/2	3
Z	3	4	-0.5	0.5	-2.5	2.5	13
C - Z	0	0	0.5	M-0.5	2.5	M-2.5	

نقوم بتقييم الحل من خلال قيم صف (C - Z)، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل الحل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

- عدد الوحدات المنتجة من (X_1) = 3.
- عدد الوحدات المنتجة من (X_2) = 1.
- قيمة دالة الهدف (Z) = 13.

ملاحظة مهمة: عند خروج المتغير الوهمي من الحل الأساسي لا يعود إليه نهائياً بغض النظر عن قيمة (C - Z) المقابلة له.

ويمكن حل مشاكل التقليل عن طريق استخدام نفس القواعد المتبعة في مشاكل التعظيم، وذلك من خلال تحويل مشكلة البرمجة الخطية من تقليل إلى تعظيم عن طريق ضرب **دالة الهدف** بعد التحويل إلى الشكل القياسي في (-1)، بعدها يتم تطبيق مراحل طريقة الحل المبسطة بقواعد وشروط مشاكل التعظيم، وعند الوصول إلى الحل الأمثل تضرب قيمة (Z) الناتجة في (-1) لنحصل على أقل قيمة لدالة الهدف الأصلية وهي "التقليل".

بالعودة إلى مثال شركة المأمون فإن نموذج البرمجة الخطية الممثل للمشكلة كان على النحو الأتي:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2$$

ST

$$1X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$1X_1 + 1X_2 \geq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

والشكل القياسي لهذا النموذج هو:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ST.

$1X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 6$

$1X_1 + 1X_2 - S_2 + A_2 = 4$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$

يتم تحويل المشكلة إلى تعظيم (Max) عن طريق تغيير إشارة دالة الهدف، أي ضرب دالة الهدف بـ (1-) وبالتالي يصبح الشكل القياسي لنموذج البرمجة الخطية على النحو الآتي:

$\text{Max } Z = -3X_1 - 4X_2 - 0S_1 - MA_1 - 0S_2 - MA_2$

ST.

$1X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 6$

$1X_1 + 1X_2 - S_2 + A_2 = 4$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$

نحل هذا النموذج حسب قواعد مشاكل التعظيم حسب ما مر سابقاً، فنحصل على جدول الحل الأمثل (4- 11) أ التالي:

جدول (4- 11) أ: جدول الحل الأمثل لمشكلة شركة المأمون

Max		-3	-4	0	-M	0	-M	
Basic Variables		X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	RHS
-4	X_2	0	1	-0.5	0.5	0.5	-0.5	1
-3	X_1	1	0	0.5	-0.5	-3/2	3/2	3
Z		-3	-4	0.5	-0.5	2.5	-2.5	-13
C - Z		0	0	-0.5	-M+0.5	-2.5	-M+2.5	

لاحظ بأن جميع القيم أقل من أو تساوي صفر وهو شرط الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التعظيم وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل الحل الأمثل، بعدها نحول جدول الحل الأمثل الخاص بدالة الهدف "تعظيم" إلى جدول الحل الأمثل الخاص بدالة الهدف "تقليل" عن طريق إعادة ضرب معاملات متغيرات دالة الهدف بـ (1-) وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول (4- 11) ب الآتي:

جدول (4- 11) ب: جدول الحل الأمثل لمشكلة شركة المأمون

Min	3	4	0	M	0	M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
4 X_2	0	1	-0.5	0.5	0.5	-0.5	1
3 X_1	1	0	0.5	-0.5	-3/2	3/2	3
Z	**3**	**4**	**-0.5**	**0.5**	**-2.5**	**2.5**	**13**
C - Z	**0**	**0**	**0.5**	**M-0.5**	**2.5**	**M-2.5**	

وهو نفس جدول الحل الأمثل الذي حصلنا عليه سابقاً.

4.4 طريقة المرحلتين في حل نموذج البرمجة الخطية

Two-Phases Technique

يتم الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة من خلال مرحلتين هما:

المرحلة الأولى

1. تكوين نموذج برمجة خطية جديد بدالة هدف جديدة أو مصطنعة يرمز لها بالرمز (W) وهي عبارة عن مجموع المتغيرات الوهمية المضافة إلى القيود عند تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل القياسي.
2. طبيعة دالة الهدف في النموذج الجديد تكون تقليل (Minimization) بغض النظر عن طبيعة الهدف الأصلي للمشكلة.
3. تبقى قيود دالة الهدف الجديدة (W) نفس قيود دالة الهدف الأصلية.
4. تحويل النموذج الجديد إلى الشكل القياسي.
5. حل النموذج باستخدام طريقة الحل المبسطة، على أساس أن الهدف تقليل (Minimization).
6. بناء جدول الحل الأولي.

7. التحقق من أمثلية الحل الأولي، أي أن تكون جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر لأن دالة الهدف تقليل، فإذا تحققت الأمثلية يتم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية

1. تبدأ هذه المرحلة بالحل النهائي (الأمثل) الذي تم التوصل إليه في المرحلة الأولى، وتستبدل دالة الهدف الوهمية (W) بمعاملات دالة الهدف الأصلية.

2. التحقق من أمثلية الحل، عن طريق استخراج قيم صف (C-Z)

مثال (4- 3): حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة المرحلتين

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2$$

St.

$$1X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$1X_1 + 1X_2 \geq 4$$

$$X_1 . X_2 \geq 0$$

الحل

المرحلة الأولى

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية، وذلك لتحديد عدد المتغيرات الوهمية المستخدمة في تكوين دالة الهدف الجديدة (الوهمية W)، كما يأتي:

$$1X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 6$$

$$1X_1 + 1X_2 - S_2 + A_2 = 4$$

إذن فإن دالة الهدف الوهمية W هي:

$$\text{Min } W = A_1 + A_2$$

وحيث أن المتغيرات التي ظهرت في القيود هي:

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2$

فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في الصيغة القياسية لدالة الهدف الوهمية، وتكون معاملات المتغيرات الوهمية (A_1، وA_2) تساوي (1)، أما معاملات بقية المتغيرات (X_1, X_2, S_1, S_2) فتأخذ قيمة صفر كما يلي:

$$\text{Min } W = 0X_1 + 0X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1A_2 + 1A_1$$

2. بناء جدول الحل الأولي:

جدول (4- 12) جدول الحل الأولي (الأساسي)

Min	0	0	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
1 A_1	1	3	-1	1	0	0	6
1 A_2	1	1	0	0	-1	1	4
Z	2	4	-1	1	-1	1	10
C - Z	-2	-4	1	0	1	0	

3. إيجاد الحل الأمثل حسب الخطوات التي مرت سابقاً، وعلى النحو الأتي:

جدول (4- 13) جدول التعديل الأول

Min	0	0	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
0 X_2	1/3	1	-1/3	1/3	0	0	2
1 A_2	2/3	0	1/3	-1/3	-1	1	2
Z	2/3	0	1/3	-1/3	-1	1	20
C - Z	-2/3	0	-1/3	4/3	1	0	

جدول (4- 14) جدول الحل الأمثل

Min	0	0	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
0 X_2	0	1	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1
0 X_1	1	0	1/2	-1/2	-1.5	1.5	3
Z	0	0	0	0	0	0	0
C - Z	0	0	0	1	0	1	

بما أن جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر، ولا يوجد متغير وهمي ضمن الحل الأساسي، فهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل لدالة الهدف الوهمية (W) وانتهاء المرحلة الأولى، وننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

تبدأ هذه المرحلة من جدول الحل الأمثل في المرحلة الأولى، ولكن تُستبدل معاملات دالة الهدف الوهمية (W) بمعاملات دالة الهدف الأصلية، وتتم عملية التحقق من أمثلية الحل كما يأتي:

جدول (4- 15) جدول الحل الأمثل (المرحلة الثانية)

Min	3	4	0	M	0	M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
4 X_2	0	1	-0.5	0.5	0.5	-0.5	1
3 X_1	1	0	0.5	-0.5	-3/2	3/2	3
Z	3	4	-0.5	0.5	-2.5	2.5	13
C - Z	0	0	0.5	M-0.5	2.5	M-2.5	

وهذا نفس الحل الذي تم التوصل إليه باستخدام طريقة M الكبرى السابقة.

5.4 حالات ومشاكل خاصة في البرمجة الخطية

Special Cases in the LP Models

هناك أربع حالات ومشاكل خاصة تظهر عند استخدام طريقة الحل المبسطة في حل مشاكل البرمجة الخطية، وتنشأ هذه الحالات نتيجة خلل في بناء النموذج الرياضي، أو نتيجة الحل بالطريقة المبسطة وهذه الحالات هي:

1. تعذر الحل أو عدم وجود حل ممكن Infeasibility.
2. عدم توفر الحدود Unbounded.
3. تعدد البُدائل (توفر عدة حلول مثالية Alternate Optimal Solution
4. الانحلال Degeneracy.

وفيما يلي توضيح لهذه الحالات الخاصة.

1. تعذر الحل أو عدم وجود حل ممكن **Infeasibility**

سبق أن بينا بأن هذه الحالة تعني عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات جميع القيود، أي عدم وجود منطقة حل ممكن، وتحدث هذه الحالة إذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تضم قيوداً متعارضة. ويتم الوصول إلى هذه الحالة عند استخدام طريقة الحل المبسطة عندما نصل إلى جدول الحل الأمثل ويكون أحد المتغيرات الوهمية ضمن الحل الأساسي (المتغيرات الأساسية) في جدول الحل الأمثل. والمثال التالي يوضح هذه الحالة.

مثال (4- 4): حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل المبسطة

$$\textbf{Max } Z = 4X_1 + 8X_2$$

St.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$-1X_1 + 1X_2 \geq 8$$

$$X_1.\ X_2 \geq 0$$

والجدول (4- 16) التالي يبين الحل الأمثل لهذه المشكلة

جدول (4- 16) حالة تعذر الحل أو عدم وجود حل ممكن Infeasibility

Max		4	8	0	0	-M	RHS
Basic Variables		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	
8	X_2	1	1	0.5	0	0	5
-M	A_1	-2	0	-0.5	-1	1	3
Z		8+2M	8	4+0.5M	M	-M	40+3M
C - Z		-4-2M	0	-4-0.5M	-M	0	

من الجدول السابق نلاحظ بقاء المتغير الوهمي (الاصطناعي) في جدول الحل الأمثل، وهذا يعني عدم وجود حل ممكن لهذه المشكلة.

2. عدم توفر الحدود Unboundedness

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة، وبالنسبة لطريقة الحل المبسطة فإن هذا يحدث عندما لا نستطيع تحديد الصف المحوري (المتغير الذي سيغادر الحل) لعدم وجود نسبة موجبة، أي عدم وجود حاصل قسمة موجب لقيم عمود الكميات على قيم العمود المحوري، أي أن في هذه الحالة تكون جميع قيم العمود المحوري أقل من أو تساوي صفر (سالبة أو أصفار)، علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية التي دالة الهدف له تعظيم. والمثال التالي يوضح هذه الحالة

مثال (4- 5): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية

Max $Z = X_1 + X_2$

St.

$8X_1 + 6X_2 \geq 24$

$2X_1 + 6X_2 \geq 12$

$X_1. X_2 \geq 0$

والجدول (4- 17) التالي يبين الحل الأمثل لهذه المشكلة:

جدول (4- 17) حالة عدم توفر الحدود Unboundedness

Max	1	1	0	-M	0	-M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
1 X_1	1	3	0	0	-0.5	0.5	5
0 S_1	0	18	1	-1	-4	0.4	3
Z	**1**	**3**	**0**	**0**	**-0.5**	**0.5**	**6**
C - Z	**0**	**-2**	**0**	**-M**	**0.5**	**-M-0.5**	

لاحظ من الجدول السابق بأن المتغير الذي سيدخل الحل هو (S_2) وعموده هو العمود المحوري، ولكن يتعذر تحديد المتغير الذي سيغادر الحل (الصف المحوري)

بسبب عدم إمكانية الحصول على نسبة موجبة، وذلك لأن جميع قيم العمود المحوري سالبة.

3. تعدد البدائل (توفر عدة حلول مثالية) Alternate Optimal Solution

وتعني أن مشكلة البرمجة الخطية لها أكثر من نقطة حل أمثل، أي أن قيمة (Z) متساوية عند أكثر من نقطة. وفي حالة استخدام طريقة الحل المبسطة، يتم تشخيص هذه الحالة عندما يمكن تكوين أكثر من حل أساسي ويعطي نفس قيمة الحل الأمثل، وتتحقق هذه الحالة عندما تكون قيمة (C - Z) لأحد المتغيرات غير الأساسية تساوي "صفر"، إذ أنه في هذه الحالة يمكن أن يتحول هذا المتغير إلى متغير أساسي وتكوين جدول جديد يعطي نفس الحل الأمثل، والمثال التالي يوضح هذه الحالة

مثال (4- 6): أفترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2 + X_3$$

St.

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \geq 4$$

$$2X_1 + 4X_2 \leq 20$$

$$4X_1 + 8X_2 + 2X_3 \leq 16$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

والجدول (4- 18) أ التالي يبين الحل الأمثل الأول لهذه المشكلة

جدول (4- 18) أ: حالة تعدد البدائل **Alternate Optimal Solution**

Max	2	1	1	0	-M	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	S_2	S_3	
2 X_1	1	2	0.5	0	0	0	0.25	4
0 S_2	0	0	-1	0	0	1	-0.5	12
0 S_1	0	6	0	1	-1	0	1	12
Z	2	4	1	0	0	0	0.5	8
C - Z	0	-3	0	0	-M	0	-0.5	

يتضح من جدول الحل الأمثل الأول بأن الحل الأمثل هو:

$X_1 = 4, S_1 = 12, S_2 = 12, Z = 8.$

ومن خلال ملاحظة قيم صف (C - Z) يتبين بأن معامل (X_3) في هذا الصف يساوي "صفر"، وهذا يعني إمكانية تكوين حل أمثل آخر بدخول (X_3) إلى الحل الأساسي وخروج (X_1)، ونحصل على حل أمثل آخر كما هو مبين في الجدول (4- 18) ب التالي:

جدول (4- 18) ب: حالة تعدد البدائل **Alternate Optimal Solution**

Max	2	1	1	0	-M	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	S_2	S_3	
1 X_3	2	4	1	0	0	0	0.5	8
0 S_2	2	4	0	0	0	1	0	16
0 S_1	0	6	0	1	-1	0	1	12
Z	2	4	1	0	0	0	0.5	8
C - Z	0	-3	0	0	-M	0	-0.5	

نلاحظ من جدول الحل الأمثل الثاني تحقق نفس قيمة (Z) في جدول الحل الأمثل الأول مع تغير متغيرات الحل الأساسي التي أصبحت: .

$X_3 = 8, S_1 \text{ (Surplus)} = 12, S_2 \text{ (Slack)} = 16, Z = 8.$

ولا تعتبر حالة تعدد الحلول المثلى عيباً في النموذج الرياضي، ولكنها ميزة للنموذج لأنها تعطي متخذ القرار مرونة في اختيار الحل الأمثل.

4. الانحلال Degeneracy

تظهر حالة الانحلال في حل مشكلة البرمجة الخطية عندما يكون واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي قيمته (صفر)، وعند استخدام طريقة الحل المبسطة قد تظهر حالة الانحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف.

يمكن الاستدلال على حالة الانحلال في طريقة الحل المبسطة عندما تتساوى النسبة الموجبة الدنيا التي من خلالها نُحدد المتغير الذي سيغادر الحل، ويمكن توضيح حالة الانحلال كما في المثال التالي:

مثال (4- 7): أفترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 6X_2$$

St.

$$6X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$1X_2 \leq 3$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وباستخدام طريقة الحل المبسطة نحصل على الحل كما في الجدول التالي:

جدول (4- 19) أ: جدول الحل الأولي

Max	4	6	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	6	4	1	0	0	24
0 S_2	0	1	0	1	0	3
0 S_3	5	10	0	0	1	40
Z	0	0	0	0	0	0
C - Z	4	6	0	0	0	

جدول (4- 19) ب: التعديل الأول

Max	4	6	0	0	0	RHS	Ratio
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
0 S_1	6	0	1	-4	0	12	2
6 X_2	0	1	0	1	0	3	---
0 S_3	5	0	0	-10	1	10	2
Z	0	6	0	6	0	18	
C - Z	4	0	0	-6	0		

جدول (4- 19) ج: التعديل الثاني

Max	4	6	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	0	0	1	8	-6/5	0
6 X_2	0	1	0	1	0	3
4 X_1	1	0	0	-2	1/5	2
Z	4	6	0	-2	4/5	26
C - Z	0	0	0	2	-4/5	

جدول (4- 19) د: التعديل الثالث (الحل الأمثل)

	Max	4	6	0	0	0	RHS
	Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_2	0	0	1/8	1	-3/20	0
6	X_2	0	1	-1/8	0	3/20	3
4	X_1	1	0	1/4	0	-1/10	2
	Z	4	6	1/4	0	0.5	26
	C - Z	0	0	-1/7	0	-0.5	

من الجداول السابقة يمكن ملاحظة بأن حالة الانحلال ظهرت في المرحلة الثانية (التعديل الأول)، حيث تساوت النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي سيغادر الحل عند المتغير (S_1) وعند (S_3) إذ كانت النسبة الدنيا لكليهما تساوي (2)، وتم اختيار (S_3) عشوائياً كمتغير خارج من الحل بسبب عدم وجود معيار محدد لتحديد المتغير الخارج من الحل الأساسي، لذلك فعند تساوي النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي سيغادر الحل، يتم اختيار المتغير الخارج من الحل الأساسي عشوائياً.

كما يلاحظ من الجداول السابقة بأن حالة الانحلال استمرت حتى نهاية الحل والوصول إلى الحل الأمثل، إلا أن قيمة دالة الهدف لم تتحسن وبقيت بقيمة (26).

6.4 تمارين محلولة

1. حل نموذج البرمجة الخطية التالي (مثال (3- 1)) باستخدام طريقة الحل المبسطة:

Max $Z = 100 X_1 + 200 X_2$

St.

$2X_1 + 5X_2 \leq 180$

$3X_1 + 3X_2 \leq 135$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل

تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية على النحو الأتي:

$$Max\ Z = 100\ X_1 + 200\ X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

St.

$$2X_1 + 5X_2 + S_1 = 180$$

$$3X_1 + 3X_2 + S_2 = 135$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

تكوين جدول الحل الأولي:

جدول (4- 20) أ: جدول الحل الأولي

Max	100	200	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	
0 S_1	2	5	1	0	180
0 S_2	3	3	0	1	135
Z	0	0	0	0	0
C - Z	100	200	0	0	

خارج (S_1) — داخل (X_2)

جدول (4- 20) ب: جدول التعديل الأول

Max	100	200	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	
200 X_2	2/5	1	1/5	0	36
0 S_2	9/5	0	-3/5	1	27
Z	80	200	40	0	7200
C - Z	20	0	-40	0	

خارج (S_2) — داخل (X_1)

جدول (4- 20) ج: جدول التعديل الثاني (الحل الأمثل)

Max	100	200	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	
200 X_2	0	1	1/3	-2/9	30
100 X_1	1	0	-3/9	5/9	15
Z	100	200	100/3	100/9	7500
C - Z	0	0	-100/3	-100/9	

2. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة المرحلتين:

$$\text{Min } Z = 4X_1 + 5X_2$$

St.

$$3X_1 + 1X_2 \leq 27$$

$$5X_1 + 5X_2 = 60$$

$$6X_1 + 4X_2 \geq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل

المرحلة الأولى

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية، وذلك لتحديد عدد المتغيرات الوهمية المستخدمة في تكوين دالة الهدف الجديدة (الوهمية W)، كما يأتي:

$$3X_1 + 1X_2 + S_1 = 27$$

$$5X_1 + 5X_2 + A_1 = 60$$

$$6X_1 + 4X_2 - S_2 + A_2 = 60$$

إذن فإن دالة الهدف الوهمية W هي:

$$\text{Min } W = A_1 + A_2$$

وحيث أن المتغيرات التي ظهرت في القيود هي:

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2$

فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في الصيغة القياسية لدالة الهدف الوهمية، وتكون معاملات المتغيرات الوهمية (A_1، وA_2) تساوي (1)، أما معاملات بقية المتغيرات ($X_1, X_2 S_1, S_2$) فتأخذ قيمة صفر كما يلي:

$$\text{Min } W = 0X_1 + 0X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1A_2 + 1A_1$$

2. بناء جدول الحل الأولي:

جدول (4- 21) أ: جدول الحل الأولي (الأساسي)

Min		0	0	0	1	0	1	RHS	
Basic Variables		X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2		
0	S_1	3	1	1	0	0	0	27	خارج
1	A_1	5	5	0	1	0	0	60	
1	A_2	6	4	0	0	-1	1	60	
W		11	9	0	1	-1	1	120	
C - W		-11	-9	0	0	1	0		
		داخل							

3. إيجاد الحل الأمثل حسب الخطوات التي مرت سابقاً، وعلى النحو الأتي:

جدول (4- 21) ب: جدول التعديل الأول

Min		0	0	0	1	0	1	RHS	
Basic Variables		X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2		
0	X_1	1	1/3	1/3	0	0	0	9	
1	A_1	0	10/3	-5/3	1	0	0	15	
1	A_2	0	2	-2	0	-1	1	6	خارج
W		0	16/3	-11/3	1	-1	1	21	
C - W		0	-16/3	11/3	0	1	0		
			داخل						

جدول (4- 21) ج: جدول التعديل الثاني

Min	0	0	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
0 X_1	1	0	2/3	0	1/6	-1/6	8
1 A_1 خارج	0	0	5/3	1	5/3	-5/3	5
0 X_2	0	1	-1	0	-1/2	1/2	3
W	0	0	3	1	5/3	-5/3	5
C - W	0	0	-3 داخل	0	-5/3	8/3	

جدول (4- 21) د: جدول التعديل الثالث (الحل الأمثل)

Min	0	0	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
0 X_1	1	0	0	-2/5	-1/2	1/2	6
0 S_1	0	0	1	3/5	1	-1	3
0 X_2	0	1	0	3/5	1/2	-1/2	6
W	0	0	0	0	0	0	0
C - W	0	0	0	0	0	0	

بما أن جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر، ولا يوجد متغير وهمي ضمن الحل الأساسي، فهذا يعني الوصول إلى الحل الأمثل لدالة الهدف الوهمية (W) وانتهاء المرحلة الأولى، وننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: تبدأ هذه المرحلة من جدول الحل الأمثل في المرحلة الأولى، ولكن تُستبدل معاملات دالة الهدف الوهمية (W) بمعاملات دالة الهدف الأصلية، وتتم عملية التحقق من أمثلية الحل كما يأتي:

جدول (4- 21) هـ: جدول الحل الأمثل (المرحلة الثانية)

Min	4	5	0	M	0	M	
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	RHS
4 X_1	1	0	0	-2/5	-1/2	1/2	**6**
0 S_1	0	0	1	3/5	1	-1	**3**
5 X_2	0	1	0	3/5	1/2	-1/2	**6**
Z	**4**	**5**	**0**	**7/5**	**1/2**	**-1/2**	**54**
C - Z	**0**	**0**	**0**	**M-7/5**	**0**	**M+1/2**	

بما أن جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر، ولا يوجد متغير وهمي ضمن الحل الأساسي، فهذا يعني أن الحل أمثل وأن قيم المتغيرات عند الحل الأمثل هي على النحو الأتي:

$X_1 = 6, X_2 = 6, S_1 = 3, S_2 = 0, Z = 54$

3. حُل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة المرحلتين:

Min $Z= 3X_1 + 2X_2$

St.

$3X_1 + 2X_2 \geq 4$

$2X_1 + 4X_2 \geq 1$

$1X_1 + 1X_2 \geq 3$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل

المرحلة الأولى

1. تحويل القيود إلى الصيغة القياسية، وذلك لتحديد عدد المتغيرات الوهمية المستخدمة في تكوين دالة الهدف الجديدة (الوهمية W)، كما يأتي:

$3X_1 + 2X_2 - S_1 + A_1 = 4$

$2X_1 + 4X_2 - S_2 + A_2 = 1$

$$1X_1 + 1X_2 - S_3 + A_3 = 3$$

إذن فإن دالة الهدف الوهمية W هي:

$$Min\ W = A_1 + A_2 + A_3$$

وحيث أن المتغيرات التي ظهرت في القيود هي:

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3$$

فإن هذه المتغيرات جميعها يجب أن تظهر في الصيغة القياسية لدالة الهدف الوهمية، وتكون معاملات المتغيرات الوهمية (A_1، A_2، وA_3) تساوي (1)، أما معاملات بقية المتغيرات (X_1, X_2, S_1, S_2, S_3) فتأخذ قيمة صفر كما يلي:

$$Min\ W = 0X_1 + 0X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1A_1 + 1A_2 + 1A_3$$

2. بناء جدول الحل الأولي:

جدول الحل الأولي (الأساسي)

Min	0	0	0	1	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	S_3	A_3	
1 A_1	3	2	-1	1	0	0	0	0	**4**
1 A_2 (خارج)	2	4	0	0	-1	1	0	0	**1**
1 A_3	1	1	0	0	0	0	-1	1	**3**
W	**6**	**7**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**8**
C - W	**-6**	**-7** (داخل)	**1**	**-1**	**1**	**-1**	**1**	**-1**	

3. إيجاد الحل الأمثل حسب الخطوات التي مرت سابقاً حتى نصل إلى جدول الحل الأمثل الأتي:

جدول الحل الأمثل (انتهاء المرحلة الأولى)

Min	0	0	0	1	0	1	0	1	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	S_3	A_3	
0 S_2	2	0	0	0	1	-1	-4	4	11
0 X_2	1	1	0	0	0	0	-1	1	3
0 S_1	-1	0	1	-1	0	0	-2	2	2
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C - W	0	0	0	1	0	1	0	1	

المرحلة الثانية:

تبدأ هذه المرحلة من جدول الحل الأمثل في المرحلة الأولى، ولكن تُستبدل معاملات دالة الهدف الوهمية (W) بمعاملات دالة الهدف الأصلية، وتتم عملية التحقق من أمثلية الحل كما يأتي:

جدول الحل الأمثل (المرحلة الثانية)

Min	3	2	0	M	0	M	0	M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	S_3	A_3	
0 S_2	2	0	0	0	1	-1	-4	4	11
2 X_2	1	1	0	0	0	0	-1	1	3
0 S_1	-1	0	1	-1	0	0	-2	2	2
Z	2	2	0	0	0	0	-2	2	6
C - Z	1	0	0	M	0	M	0	M-2	

بما أن جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر، ولا يوجد متغير وهمي ضمن الحل الأساسي، فهذا يعني أن الحل أمثل وأن قيم المتغيرات عند الحل الأمثل هي على النحو الأتي:

$X_1 = 0, X_2 = 3, S_1 = 2, S_2 = 11, S_3 = 0, Z = 6$

4. حُل نموذج البرمجة الخطية الأتي باستخدام طريقة الحل المبسطة Simplex Method.

$$\textbf{Max } Z = 10X_1 + 16X_2 + 24X_3$$

St.

$6X_1 + 8X_2 + 10X_3 \le 160$

$9X_1 + 15X_2 + 20X_3 \le 250$

$2X_1 - 2X_2 + 4X_3 \le 40$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

الحل

- تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية، على النحو الأتي:

Max $Z = 10X_1 + 16X_2 + 24X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

St.

$6X_1 + 8X_2 + 10X_3 + 0S_1 = 160$

$9X_1 + 15X_2 + 20X_3 + 0S_2 = 250$

$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 0S_3 = 40$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$

- بناء جدول الحل الأولي، والتأكد من أمثلية الحل، وعلى النحو الأتي:

جدول الحل الأولي

Max	10	16	24	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	6	8	10	1	0	0	160
0 S_2	9	15	20	0	1	0	250
0 S_3	2	2	4	0	0	1	40
Z	0	0	0	0	0	0	0
C - Z	10	16	24	0	0	0	

التعديل الأول

Max	10	16	24	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	1	3	0	1	0	-2.5	60
0 S_2	-1	5	0	0	1	-0.5	50
24 X_3	0.5	0.5	1	0	0	0.25	10
Z	12	12	24	0	0	6	240
C - Z	-2	4	0	0	0	-6	

التعديل الثاني (الحل الأمثل)

Max	10	16	24	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	1.6	0	0	1	-0.6	0.5	50
16 X_2	-0.2	1	0	0	0.2	-1	10
24 X_3	0.6	0	1	0	-0.1	0.75	5
Z	11.2	16	24	0	0.8	2	280
C - Z	-1.2	0	0	0	-0.8	-2	

بما أن جميع قيم صف (C-Z) أقل من أو تساوي صفر، فهذا يعني أن الحل أمثل وأن قيم المتغيرات عند الحل الأمثل هي على النحو الأتي:

$X_1 = 0, X_2 = 10, X_3 = 5, S_1 = 50, S_2 = 0, S_3 = 0, Z = 280$

7.4 تمارين الفصل الرابع

1. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القياسية:

Max $Z = 5X_1 + 6X_2 + 8X_3$

St.

$6X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 12$

$1X_2 + 6X_3 \leq 9$

$5X_1 + 10X_2 + 2X_3 \leq 60$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

2. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القياسية:

$\text{Max } Z = X_1 + X_2 + X_3$

St.

$2X_1 + 3X_2 + 1X_3 \leq 48$

$1X_1 + 4X_2 + 1X_3 = 24$

$3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \geq 40$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

3. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القياسية:

$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$

St.

$2X_1 + 3X_2 \geq 36$

$1X_1 + 4X_2 \geq 16$

$3X_1 + 6X_2 \geq 18$

$X_1, X_2 \geq 0$

4. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة القياسية:

$\text{Min } Z = 3X_1 + 5X_2 + 2X_3$

St.

$1X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 30$

$1X_2 + 6X_3 \leq 27$

$2X_1 + 4X_2 + 6X_3 = 60$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

5. إذا كان نموذج البرمجة الخطية الممثل لأحد المشاكل الإدارية التي تواجهها إحدى المنظمات معطى على النحو الأتي:

$$\textbf{Max } Z = 20X_1 + 15X_2 + 10X_3$$

St.

$$1X_1 + 3X_2 + 5X_3 \le 45$$

$$1X_1 + 3X_2 + 2X_3 \le 20$$

$$2X_1 + 1X_2 + 1X\,x_3 \le 30$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

المطلوب:

أ. تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية.

ب. بناء جدول الحل الأولي.

ج. ما هي قيم متغيرات دالة الهدف عند الحل الأولي.

6. ترغب إحدى المؤسسات الأردنية في تخفيض تكلفة المواد التي تقوم بإنتاجها، فقام مدير العمليات في الشركة ببناء نموذج البرمجة الخطية للمشكلة، على النحو الأتي:

$$\textbf{Min } Z = 50X_1 + 10X_2 + 75X_3$$

St.

$$1X_1 + 1X_2 = 1000$$

$$2X_2 + 2X_3 = 2000$$

$$1X_1 \le 1500$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

المطلوب:

أ. تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية.

ب. حل المشكلة باستخدام طريقة المرحلتين.

ج. ما هي قيمة التكلفة عند الحل الأمثل.

7. يمثل الجدول التالي الحل الأولي لأحد نماذج البرمجة الخطية:

Max	4	6	0	0	-M	-M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
-M A_1	0	1	-1	0	1	0	30
0 S_2	0	1	0	1	0	0	100
-M A_1	2	1	0	0	0	1	140
Z	-2M	-2M	+M	0	-M	-M	-170M
C - Z	4 + 2M	6 + 2M	-M	0	0	0	

المطلوب: إعادة بناء المشكلة الأصلية (دالة الهدف والقيود).

8. استخدم الطريقة المبسطة Simplex Tableau وأوجد جدول الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي ؟ وماهي قيم متغيرات دالة الهدف عند الحل الأمثل ؟

Min $Z = 50X_1 + 10X_2 + 75X_3 + 0S_1 + MA_1 + MA_2$

St.

$X_1 - X_2 + A_1 = 1000$

$X_2 + X_3 + 0.5A_2 = 1000$

$X_2 + S_1 - A_1 = 500$

All Decision Variables ≥ 0

9. أكمل جدول الطريقة المبسطة Simplex Tableau التالي، وأوجد جدول الحل الأمثل، وماهي قيم متغيرات دالة الهدف عند الحل الأمثل؟

	5	6	0	0	M	M	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	S_3	S_2	A_1	A_2	
	0	0	-1	1	1	-1	550
	1	0	1	0	0	0	300
	0	1	0	-1	0	1	150
Z							
C - Z							

10. أكمل جدول الطريقة المبسطة Simplex Tableau التالي، وأوجد جدول الحل الأمثل، وماهي قيم متغيرات دالة الهدف عند الحل الأمثل؟ وماهي الحالة الخاصة (إن وجدت) التي تتبع لها هذه المشكلة؟

Max	4	2	6	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_1	X_1	S_1	S_2	S_3	
	1/2	1/2	0	1	-1/4	0	12.5
	1/2	1/2	1	0	1/4	0	37.5
	1/2	-3/2	0	0	-5/4	1	32.5
Z							
C - Z							

11. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل المبسطة **Simplex Solution Method** وأوجد جدول الحل الأمثل ، وماهي قيم متغيرات دالة الهدف عند الحل الأمثل؟

Max $Z = 10X_1 + 16X_2 + 24X_3$

St.

$8X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 160$ -------- 1

$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 42$ ---------2

$12X_1 + 10X_2 + 8X_3 \leq 240$ --------3

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

12. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل المبسطة ، وأوجد جدول الحل الأمثل، وماهي قيم متغيرات دالة الهدف عند الحل الأمثل؟

Max $Z = 5X_1 + 8X_2 + 12X_3$

St.

$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 80$ -------- 1

$9X_1 + 15X_2 + 20X_3 \leq 250$ ---------2

$1X_1 - 1X_2 + 2X_3 \leq 20$ ---------3

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

13. فيما يلي يمثل نموذج البرمجة الخطية الخاص بشركة اربد للصناعات الكيماوية

Maximize $Z = 3X_1 + 2X_2 - X_3$

St.

$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 10$

$2X_1 - X_2 + X_3 \leq 20$

$3X_1 + X_2 \leq 15$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

المطلوب:

أ. تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية.

ب. بناء جدول الحل الأولي.

14. استخدم طريقة المرحلتين في حل نموذج البرمجة الخطية التالي:

Minimize $Z = 4X_1 + 3X_2$

St.

$1X_1 + 2X_2 = 8$

$3X_1 + 2X_2 = 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

15. حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام طريقة الحل المبسطة:

Maximize $Z = 3X_1 + 5X_2$

St.

$4X_1 + 3X_2 \leq 48$

$X_1 + 2X_2 \leq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

16. استخدم طريقة المرحلتين في حل نموذج البرمجة الخطية التالي:

Min $Z = 4X_1 + 1X_2$

St.

$3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$1X_1 + 2X_2 \leq 4$

All Decision Variables ≥ 0

أسئلة الاختيار من متعدد Multiple Choice Question

1. إذا كانت قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل: $X_1 = 5, X_2 = 10, A_1 = 40$، يعتبر الحل:

أ. عدم وجود حدود Unbounded.

ب. متعدد البدائل Multiple optimal solutions.

ج. ممكن Feasible..

د. غير ممكن Infeasible.

2. الصيغة القياسية التي تمثل القيد التالي $X + Y \geq 20$ هي:

أ. $X + Y + S = 20$.

ب. $X + Y - S = 20$.

ج. $X + Y + S + A = 20$.

د. $X + Y - S + A = 20$.

3. إذا كانت قيمة $(C_j - Z_j)$ لأحد المتغيرات غير الأساسية عند جدول الحل الأمثل تساوي صفر، يكون الحل في هذه الحالة:

أ. غير ممكن Infeasible.

ب. عدم وجود حدود Unbounded.

ج. متعدد البدائل Multiple optimal solutions.

د. ممكن Feasible..

4. إذا كانت جميع قيم العمود المحوري أقل من أو تساوي صفر، يكون الحل:

أ. غير ممكن Infeasible.

ب. عدم وجود حدود Unbounded.

ج. متعدد البدائل Multiple optimal solutions.

د. ممكن Feasible..

5. قيمة معامل المتغير الوهمي في دالة الهدف، في حالة المشكلة "تقليل **Min**"، تساوي:

أ. M.   ب. 0.   ج. -M .   د. 1.

6. إذا كانت دالة الهدف تعظيم **(Max)** وكان الحل غير أمثل فإن المتغير الذي سيدخل إلى الحل الأساسي هو:

أ. المتغير الذي له أعلى قيمة موجبة.

ب. المتغير الذي قيمة (Z) المقابلة له أكبر قيمة موجبة.

ج. المتغير الذي قيمة (C-Z) المقابلة له أكبر قيمة موجبة.

د. المتغير الذي يحمل أكبر معامل موجب.

إذا أعطيت جدول الطريقة المبسطة التالي، أجب عن الأسئلة من (7) إلى (11):

	5	6	0	0	M	M	
Basic Variables	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	RHS
	0	0	-1	1	1	-1	550
	1	0	1	0	0	0	300
	0	1	0	-1	0	1	150
Z							
C - Z							

7. يعتبر المتغير X_2:

أ. متغير أساسي.

ب. متغير غير أساسي.

ج. متغير وهمي.

د. متغير خارج من الحل الأولي.

8. عند إكمال الجدول بالقيم المناسبة، فإن المتغير الذي سيدخل الحل هو:

أ. X_1 ب. X_2 ج. S_1 د. S_2

9. أي المتغيرات سيخرج من الحل الأساسي:

أ. A_1 ب. A_2 ج. S_1 د. S_2

10. ما هي قيمة X_1 عند الحل الأمثل:

أ. 300 ب. 500 ج. 150 د. 550

11. ما هي قيمة Z عند الحل الأمثل:

أ. 7500 ب. 2500 ج. 2400 د. 5700

8.4 مصادر الفصل الرابع

1. بلال، محمد اسماعيل (2005). بحوث العمليات: استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار. جمهرية مصر العربية، الإسكندرية: دار الجامعة الجديدة.

2. العبيدي، محمود، والفضل، مؤيد عبد الحسين (2004). بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

3. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., & Williams, Thomas A. (2004). **An Introduction to Management Science**. (11th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company.

4. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill..

5. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

6. Taha, Hamdy A., (2007). **Operations Research: An Introduction**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

7. Winston, Wayne L. (2003). **Operations Research: Applications and Algorithms.** (4th ed.), Duxbury Press.

الفصل الخامس

تحليل الحساسية والنموذج المقابل

Sensitivity Analysis And Dual Model

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد دراسة هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. تعريف مفهوم تحليل الحساسية.
2. استخدام تحليل الحساسية في تقييم التغيرات في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.
3. استخدام تحليل الحساسية في تقييم التغيرات في قيم الطرف الأيمن للقيود.
4. تحديد تأثير إضافة متغير جديد.
5. تحديد تأثير إضافة قيد جديد.
6. تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة المقابلة.
7. حل النموذج المقابل باستخدام طريقة الحل المبسطة.

الفصل الخامس

تحليل الحساسية والنموذج المقابل

Sensitivity Analysis and Dual Model

1.5 المقدمة

كان الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الذي تم تناوله في الفصول السابقة يتم تحت مجموعة من الفروض من بينها افتراض التأكد التام من المعلومات والعلاقات المختلفة المتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة، على سبيل المثال افتراض ثبات الأسعار، والمعرفة التامة بالمصادر المتاحة، وبالاحتياجات المختلفة لمتغيرات القرار، وغيرها من العوامل. لكن الواقع أن منظمات الأعمال تعمل في بيئة ديناميكية، سريعة التغير والتحول، فأسعار الموارد متغيرة مع الزمن، والتكنولوجيا تتطور باستمرار مما يؤدي إلى تغير في الطاقة الإنتاجية.

بناء على ما تقدم، صار من الضروري التعرف إلى ما يحصل للحل الأمثل الذي تم التوصل إليه تحت جملة من الافتراضات المعينة، إذا ما تغيرت المعلومات التي تم الاعتماد عليها في بناء النموذج الرياضي المستخدم، أي أن إدارة منظمة الأعمال أصبحت مهتمة وبشكل كبير في التعرف إلى محاور تحليل الحساسية التي تتمثل في:

- تأثير التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف (مدى الأمثلية).

Changes in decision variables coefficients in the objective function (Range of optimality)

- تأثير التغير في قيم الطرف الأيمن لقيود المشكلة (الموارد المتاحة: مدى الامكانية).

Changes in Right Hand Side (Range of feasibility)

- تأثير إضافة متغير قرار جديد.

Impact of adding new decision variable

- تأثير إضافة قيد جديد.

Impact of adding new constraint

- تأثير التغير في احتياجات متغيرات القرار في القيود.

Changes in decision variables coefficients in the constraints

إن التعرف إلى هذه التأثيرات سيؤدي إلى واحد من الحالات التالية:

أ. يبقى الحل الأمثل للمشكلة كما هو دون أن يتأثر بالتغيرات الجديدة.

ب. تبقى المتغيرات الأساسية كما هي، ولكن ربما تتغير قيمتها نتيجة التغيرات الجديدة.

ج. يتغير الحل الأساسي بأكمله بسبب التغيرات الجديدة.

تتم معالجة هذا الموضوع باستخدام ما يسمى "تحليل الحساسية" Sensitivity Analysis، أو تحليل ما بعد الأمثلية Post-Optimality Analysis.

ولتوضيح هذه المحاور، سيتم الاعتماد على طريقة الحل المبسطة

2.5 التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف: مدى الأمثلية Range of Optimality

يهدف مدى الأمثلية إلى تحديد الحد الأعلى Upper bound، والحد الأدنى Lower bound، لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف، والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل. ولتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية:

أ. في جدول الحل الأمثل نستبدل معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة، ونرمز له بالرمز (C_j: j = 1, 2, …, m).

ب. نعيد حساب صف (Z)، وصف (C-Z).

ج. من صف (C-Z) نختبر أمثلية الحل، حيث يجب أن تكون جميع قيم صف (C-Z) أقل من أو تساوي صفر (C-Z ≤ 0) في حال كانت طبيعة دالة الهدف تكبير (Maximization)، أو تكون جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر (C-Z ≥ 0)، في حال كانت طبيعة دالة الهدف تخفيض (Minimization)، وهذا يتطلب تكوين متباينات جانبها الأيسر أية قيمة في صف (C-Z) تحتوي على (Cj)، وجانبها الأيمن صفر، وإشارتها حسب طبيعة دالة الهدف.

د. يتم حل المتباينات التي تكونت في الخطوة السابقة، ومن نتيجة الحل نحدد حدود المعامل (Cj).

مثال (5-1): تنتج مجموعة الابراهيم لصناعة الحواسيب الشخصية ثلاثة أنواع من الحواسيب هي: الأستاذ، الصديق، والمدير. الجدول التالي يبين الربح، ومتطلبات إنتاج كل حاسوب شخصي.

المتطلبات	الأستاذ	الصديق	المدير	الكمية المتوفرة
Chassis (unit)الصناديق	1	1	1	100
Circuit (unit) الرقائق	3	3	2	240
Labor (hr) العمل	5	4	3	360
Profit (Jd/unit) الربح	40	30	25	

إن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل هذه المشكلة هو على النحو الأتي:

Max $Z= 40X_1 + 30X_2 + 25X_3$

St.

$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 \leq 100$

$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 240$

$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 360$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

حيث أن:

X_1: عدد الحواسيب من نوع الأستاذ التي يجب إنتاجها.

X_2: عدد الحواسيب من نوع الصديق التي يجب إنتاجها.

X_3: عدد الحواسيب من نوع المدير التي يجب إنتاجها.

والجدول (5- 1) التالي يبين الحل الأمثل لهذه المشكلة

جدول (5- 1) الحل الأمثل المشكلة مجموعة الابراهيم

Cj	40	30	25	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	
25 X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0 S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
40 X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z	40	32.5	25	2.5	0	7.5	2950
C - Z	0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5	

أولاً: مدى الأمثلية لمعامل X_1

لايجاد مدى الأمثلية لمعامل X_1 نتبع الخطوات التي أشرنا إليها، وعلى النحو الأتي:

أ. في جدول الحل الأمثل نستبدل معامل المتغير X_1 بمعامل مجهول القيمة، ونرمز له بالرمز (C_1).

ب. نعيد حساب صف (Z)، وصف (C-Z)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

Cj	C_1	30	25	0	0	0	RHS
الحل الأساسي	X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	
25 X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0 S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
C_1 X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z	C_1	$12.5 + 0.5 C_1$	25	$62.5 – 1.5 C_1$	0	$-12.5 + 0.5 C_1$	$1750 + 30 C_1$
C - Z	0	$17.5 - 0.5 C_1$	0	$-62.5 + 1.5 C_1$	0	$12.5 - 0.5 C_1$	

ج. من صف (C-Z) نختبر أمثلية الحل، ونقوم بتكوين متباينات جانبها الأيسر أية قيمة في صف (C-Z) تحتوي على (C_1)، وجانبها الأيمن صفر، وإشارتها أقل من أو يساوي، وعلى النحو الأتي.

$17.5 - 0.5\ C_1 \leq 0$ ------ (1)

$-62.5 + 1.5\ C_1 \leq 0$ ---- (2)

$12.5 - 0.5\ C_1 \leq 0$ ------ (3)

د. يتم حل المتباينات التي تكونت في الخطوة السابقة، ومن نتيجة الحل نحدد حدود المعامل (C_1)، وعلى النحو الأتي:

$17.5 - 0.5\ C_1 \leq 0$ ------ (1)

$17.5 \leq 0.5\ C_1$

$C_1 \geq 35$

$-62.5 + 1.5\ C_1 \leq 0$ ---- (2)

$1.5\ C_1 \leq 62.5\ 0$

$C_1 \leq 41.67$

$12.5 - 0.5\ C_1 \leq 0$ ------ (3)

$12.5 \leq 0.5\ C_1$

$C_1 \geq 25$

بناءً على هذه النتائج، نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل X_1 على النحو الأتي:

$25 \leq 35 \leq C_1 \leq 41.67$

وبما أن الحد الأدنى لمعامل X_1 هو أكبر من أو يساوي (35)، نستبعد الحد (25)، فيصبح مدى الأمثلية معامل X_1 على النحو الأتي:

$35 \leq C_1 \leq 41.67$

تفسير النتيجة: يبقى الحل آمثل ما دامت قيمة معامل X_1 بين (41.67) و(35)، ولإثبات ذلك افترض أن مجموعة الإبراهيم خفضت أرباحها من الحاسوب المسمى الأستاذ إلى (35 دينار) بدلاً من (40 دينار)، وبعد إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل، تكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الأتي:

Cj		35	30	25	0	0	0	RHS
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	
25	X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0	S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
35	X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z		35	30	25	10	0	5	2800
C - Z		0	0	0	-10	0	-5	

لاحظ أن جميع قيم صف (C-Z) أقل من أو تساوي صفر، وهذا يعني بأن الحل أمثل، وبقيت المتغيرات الأساسية على حالها، أي لم تتغير.

من ناحية أخرى، افترض أن المجموعة رفعت من ربح الحاسوب الأستاذ من (40 دينار) إلى (42 دينار)، وبعد إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل، تكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الأتي:

Cj		42	30	25	0	0	0	RHS
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	
25	X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0	S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
42	X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z		42	33.5	25	-0.5	0	8.5	2800
C - Z		0	-3.5	0	0.5	0	-8.5	

لاحظ أن أحد قيم صف (C-Z) أكبر من صفر، وهذا يعني بأن الحل لم يعد أمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها، أي أنها سوف تتغير بعد الاستمرار في عملية الحل.

ثانياً: مدى الأمثلية لمعامل X_2

لإيجاد مدى الأمثلية لمعامل X_2 نتبع الخطوات التي أشرنا إليها، وعلى النحو الأتي:

أ. في جدول الحل الأمثل نستبدل معامل المتغير X_2 بمعامل مجهول القيمة، ونرمز له بالرمز (C_2).

ب. نعيد حساب صف (Z)، وصف (C-Z)، كما هو مبين في الجدول الأتي:

Cj	40	C_2	25	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	
25 X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0 S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
40 X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z	40	32.5	25	2.5	0	7.5	2950
C - Z	0	$C_2 - 32.5$	0	-2.5	0	-7.5	

ج. من صف (C-Z) نختبر أمثلية الحل، ونقوم بتكوين متباينات جانبها الأيسر أية قيمة في صف (C-Z) تحتوي على (C_2)، وجانبها الأيمن صفر، وإشارتها أقل من أو يساوي، وعلى النحو الأتي.

$$C_2 - 32.5 \leq 0 \text{ ------ } (1)$$

د. يتم حل المتباينة التي تكونت في الخطوة السابقة، ومن نتيجة الحل نحدد حدود المعامل (C_2)، وعلى النحو الأتي:

$$C_2 - 32.5 \leq 0 \text{ ------ } (1)$$

$$C_2 \leq 32.5$$

بناءً على هذه النتيجة، نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل X_2 على النحو الأتي:

$$\text{غير محدد} \leq C_2 \leq 32.5$$

كقاعدة عامة، عندما يكون (X_i: i= 1, 2, ... , n) متغير غير أساسي عند الحل الأمثل (غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة Z المقابلة له ≥ C_i ≥ غير محدد

ثالثاً: مدى الأمثلية لمعامل X_3

لإيجاد مدى الأمثلية لمعامل X_3 نتبع نفس الخطوات السابقة، ولكن لزيادة الفائدة سنستخدم طريقة أخرى لإيجاد مدى الأمثلية للمتغيرات الأساسية الداخلة في الحل الأمثل، وعلى النحو الأتي:

1. من جدول الحل الأمثل نجد مدى أو مقدار التغير (دلتا Δ)، وهو عبارة عن حاصل قسمة قيم صف (C-Z) على القيم المقابلة لها في صف المتغير الأساسي الذي نبحث عن مدى الأمثلية له، وفي كلا الصفين يتم التركيز على القيم التي تكون أقل من صفر، أو أكبر من صفر (أي يتم تجاهل الصفر في الصفين).

2. نحدد مدى الأمثلية لمعامل المتغير الأساسي عن طريق تطبيق الصيغة التالية:

المدى = القيمة الأصلية لمعامل المتغير + دلتا.

وبتطبيق الخطوات أعلاه على المثال الحالي، نجد مدى الأمثلية لمعامل X_3، وعلى النحو الأتي:

1. نجد قيمة مقدار التغير دلتا (Δ):

$\Delta 1 = -2.5/0.5 = -5$

$\Delta 2 = -2.5/2.5 = -1$

$\Delta 3 = -7.5/-0.5 = 15$

2. نجد المدى Range.

المدى = القيمة الأصلية لمعامل المتغير + دلتا.

Range = Origin C_3 + Δ

R1 = 25 + (-5) = 20

R2 = 25 + (-1) = 24

R3 = 25 + (15) = 40

بناء على النتائج السابقة يكون مدى الأمثلية لمعامل X_3 هو:

$$24 \leq C_3 \leq 40$$

3.5 التغيرات في قيم الطرف الأيمن للقيود

Changes in Right Hand Side

1.3.5 سعر الظل Shadow Price

سعر الظل هو عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف (Z) الناتج عن زيادة أو نقص الموارد المتاحة، أيضاً هو عبارة عن الربح الإجمالي الناجم عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة، ويمكن التعبير عن سعر الظل بأنه المبلغ الذي ترغب المنظمة في دفعه للحصول على الموارد الإضافية، حيث أنها لا يمكن أن تحقق ربحاً أكثر من هذا المبلغ إذا زادت أياً من الموارد بمقدار وحدة واحدة.

يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم صف (Z) المقابلة للمتغيرات الراكدة (الزائدة أو الفائضة Slack & Surplus) في جدول الحل الأمثل. ولتوضيح هذه النقطة نعود إلى مثال مجموعة الإبراهيم حيث كان جدول الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه هو على النحو الأتي:

Cj	40	30	25	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	
25 X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0 S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
40 X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z	40	32.5	25	*2.5*	*0*	*7.5*	2950
C - Z	0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5	

بناءاً على قيم صف (Z) المقابلة للمتغيرات الراكدة (الزائدة Slack) في جدول الحل الأمثل، فإن سعر ظل المورد الأول (Chassis) هو (2.5) دينار، وسعر ظل المورد الثاني (Circuit) هو صفر، وسعر ظل المورد الثالث (Labor hour) هو (7.5) دينار. إن هذه النتائج تعني أن زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل. وستؤثر هذه الزيادة على نتيجة الحل الأساسي (عمود الطرف الأيمن) في جدول الحل الأمثل، حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديدة باستخدام العلاقة التالية:

الكميات الجديدة = القيم الأصلية + ({مقدار التغير في كمية المورد i} × {القيم المقابلة في عمود Si الممثل للمورد i}).

New RHS (quantity) = Original RHS + (Δbi × Si column)

حيث أن:

New RHS (quantity): قيم الطرف الأيمن (الكميات) الجديدة.

Original RHS: قيم الطرف الأيمن الأصلية عند الحل الأمثل.

Δbi: مقدار التغير في الكمية الأصلية للمورد i.

Si column: قيم عمود المتغير الراكد i (زائد أو فائض) في جدول الحل الأمثل.

فعلى سبيل المثال إن زيادة الكمية المتوفرة من صناديق الحواسيب (Chassis) وحدة واحدة، ستؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار (2.5) دينار، وتصبح قيمة (Z) 2952.5

دينار، وستؤثر هذه الزيادة على نتيجة الحل الأساسي (عمود الطرف الأيمن) في جدول الحل الأمثل، حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديدة باستخدام العلاقة المشار إليها أعلاه، وعلى النحو الأتي:

Origin RHS + (Δb1 * S_1 column) = New RHS

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} + [1] \times \begin{bmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72.5 \\ 9.5 \\ 28.5 \end{bmatrix}$$

وبناءاً على القيم الجديدة للطرف الأيمن، يتم إعادة احتساب قيمة (Z) الجديدة وعلى النحو الأتي:

$$Z = (25)(72.5) + (0)(9.5) + (40)(28.5) = 2952.5$$

وغالباً ما تقوم الشركات بزيادة الموارد التي تحقق لها أعلى ربح ممكن (أعلى سعر ظل)، أو تخفيض الموارد التي تحقق لها أقل تكلفة ممكنة (أعلى سعر ظل). وفي هذه الحالة ستقوم مجموعة الابراهيم بزيادة ساعات العمل (المورد الثالث) التي تحقق لها أعلى ربح، حيث أن زيادة ساعات العمل ساعة واحدة ستزيد الربح بمقدار (7.5) دينار.

إفترض أن مجموعة الابراهيم زادت ساعات العمل بمقدار (10) ساعات من 360 ساعة عمل إلى 370 ساعة عمل، ما هو تأثير ذلك على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح، وعلى نتيجة الحل الأساسي.

إن قيمة (Z) ستزيد بمقدار (7.5) دينار لكل ساعة عمل إضافية، أي أن الأرباح ستزيد بمقدار 75 دينار(10×75)، أما نتيجة الحل الأساسي سوف تتغير تبعاً لتغير العدد المتاح من ساعات العمل، حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديدة باستخدام العلاقة المشار إليها أعلاه، وعلى النحو الأتي:

$$\text{Origin RHS} + (\Delta b3 * S_3 \text{ column}) = \text{New RHS}$$

$$\begin{bmatrix}70\\10\\30\end{bmatrix}+[10]\times\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\\0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65\\5\\35\end{bmatrix}$$

وبناءاً على القيم الجديدة للطرف الأيمن، يتم إعادة احتساب قيمة (Z) الجديدة وعلى النحو الأتي:

$$Z = (25)(65) + (0)(5) + (40)(35) = 3025$$

والسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو: إلى إي مدى تستطيع منظمات الأعمال زيادة كميات الموارد المتاحة إليها، وبالتالي زيادة أرباحها؟ على سبيل المثال هل تستطيع مجموعة الابراهيم زيادة عدد ساعات العمل أكثر، مما يؤدي إلى زيادة أرباحها دون أن يؤثر ذلك في الحل الأمثل؟ يجيب عن هذه الأسئلة تحليل الحساسية لقيم الطرف الأيمن في قيود نموذج البرمجة الخطية، أي إيجاد ما يسمى بمدى الإمكانية.

2.3.5 مدى الامكانية Range of Feasibility

من الواضح، أن منظمات الأعمال لا يمكنها إضافة عدد غير محدد من وحدات الموارد المتاحة دون أن تؤثر في أحد قيود المشكلة. عندما تحدثنا عن سعر الظل، وجدنا بأن سعر ظل زيادة ساعة عمل واحدة هو (7.5) دينار، ونحن نرغب في معرفة كم عدد ساعات العمل التي نستطيع فعلياً استخدامها لزيادة الأرباح. هل هي ساعة واحدة، ساعتين، أم مئة ساعة عمل؟ إن هذه العملية تتطلب تحديد المدى الذي يمكن أن يحافظ على قيمة سعر الظل، أي أن نبقى ضمن مزيج الحل الأمثل. من خلال مدى الإمكانية نستطيع تحديد عدد الوحدات من أي مورد (ساعات العمل مثلاً) التي يمكننا إضافتها أو التخلص منها دون أن يؤثر ذلك في سعر الظل الخاص بالمورد.

يهدف مدى الإمكانية إلى تحديد الحد الأعلى، والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن لقيود نموذج البرمجة الخطية (الموارد المتاحة). على سبيل المثال، يمثل الطرف الأيمن لقيود مشكلة مجموعة الابراهيم، عدد الوحدات المتوفرة من كل مورد من الموارد الثلاثة. وتستطيع إدارة أي منظمة الحصول على معلومات ذات قيمة عالية إذا ما

تمكنت من معرفة مقدار الفائدة التي يمكن الحصول عليها في حال امتلاكها لكميات أكبر من الموارد المتوفرة، وتحليل حساسية الطرف الأيمن يساعد في توفير هذه المعلومات.

لتحديد مدى الإمكانية نتبع الخطوات التالية:

أ. من جدول الحل الأمثل نجد مدى التغير في الطرف الأيمن للقيد i ($\Delta bi: i = 1, 2, \ldots, n$)، وهو عبارة عن حاصل قسمة قيم عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود المتغير الراكد التابع للقيد الذي نبحث في إيجاد مدى الإمكانية لطرفه الأيمن.

ب. نحدد طرفي مدى الإمكانية (الحد الأعلى والحد الأدنى)، باستخدام الصيغة التالية:

مدى الإمكانية = الكمية الأصلية للطرف الأيمن للقيد (i) - مدى التغير

Range of feasibility = Original Quantity - Δ bi

وبتطبيق الخطوات السابقة على مثال مجموعة الإبراهيم، نحصل على الأتي:

أولاً: مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الأول، والتي سنرمز لها بالرمز ($b1$):

الجدول التالي يمثل الحل الأمثل لمشكلة مجموعة الابراهيم:

Cj		40	30	25	0	0	0	
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	RHS
25	X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70
0	S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10
40	X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30
Z		40	32.5	25	2.5	0	7.5	2950
C - Z		0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5	

أ. نجد مدى التغير (Δ bi)، على النحو الأتي:

Δ bi = RHS column Values / corresponding S_1 column Values

$\Delta 1$ b1 = 70/2.5 = 28

$\Delta 2$ b1 = 10/-0.5 = -20

$\Delta 3$ b1 = 30/-1.5 = -20

ب. نجد المدى، باستخدام الصيغة المشار إليها أعلاه.

إن الكمية الأصلية للطرف الأيمن في القيد الأول هي: 100 وحدة، لذلك فإن المدى:

Range of feasibility = Original Quantity - Δ bi

R1 = 100 – (28) = 72

R2 = 100 – (-20) = 120

R3 = 100 – (-20) = 120

بناء على النتائج السابقة، فإن مدى الإمكانية للقيد الأول هو:

$$72 \leq b1 \leq 120$$

وهذا يعني أن ما دامت الكمية المتاحة من صناديق الحواسيب (المورد الأول) بين 120 و72 لن يتغير سعر ظل المورد الأول، وسيبقى الحل أمثل.

ثانياً: مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الثاني، والتي سنرمز لها بالرمز (b2)، ولزيادة الفائدة سنستخدم طريقة ثانية لإيجاد مدى الإمكانية، حيث تحدد لنا هذه الطريقة مقدار مدى التغير، أي الحد الأدنى، والحد الأعلى للتغير في قيمة الطرف الأيمن للقيد، وفيما يلي توضيح لهذه الطريقة. لتحديد مقدار التغير نستخدم العلاقة التالية:

$$[RHS] + [\Delta bi][Si\ column] \geq 0$$

حيث أن:

RHS: قيم عمود الطرف الأيمن في جدول الحل الأمثل.

Δbi: مقدار التغير في حدود المورد المتاح، بحيث يبقى الحل ممكن (أمثل).

Si column: قيم عمود المتغير الراكد i (زائد أو فائض) في جدول الحل الأمثل.

وبتطبيق ذلك على القيد الثالث في مثال مجموعة الابراهيم، نحصل على:

Origin RHS + (Δb3 * S_3 column) $\geq$ 0

$$\begin{bmatrix}70\\10\\30\end{bmatrix}+([\Delta b3]\times\begin{bmatrix}-0.5\\-0.5\\0.5\end{bmatrix})\geq 0$$

نقوم بتكوين المتباينات التالية:

70 – 0.5 Δb3 $\geq$ **0** ------- (1)

10 – 0.5 Δb3 $\geq$ **0** ------- (2)

30 + 0.5 Δb3 $\geq$ **0** ------- (3)

نقوم بعملية حل المتباينات، وعلى النحو الأتي:

70 – 0.5 Δb3 $\geq$ 0 ------- (1)

70 $\geq$ 0.5 Δb3

Δb3 $\leq$ 140

10 – 0.5 Δb3 $\geq$ 0 ------- (2)

10 $\geq$ 0.5 Δb3

Δb3 $\leq$ 20

30 + 0.5 Δb3 $\geq$ 0 ------- (3)

0.5Δb3 $\geq$ -30

Δb3 $\geq$ -60

بناءاً على هذه النتائج فإن مدى التغير للمورد الثالث هو: $-60 \leq \Delta b3 \leq 20$ ،
أي أن مدى التغير المسموح به من المورد الثالث بحيث يبقى الحل ممكن (أمثل) هو إمكانية زيادة الكمية المتاحة من المورد الثالث (20) وحدة كحد أقصى فتصبح (380)، أو تخفيضها (60) وحدة كحد أقصى لتصبح (300)، في حالة وجود أكثر من حد أعلى نأخذ القيمة الأصغر، وفي حالة وجود أكثر من حد أدنى نأخذ القيمة الأكبر. بعد استخراج النتائج نقوم بحساب مدى الامكانية، وذلك بإضافة الحد الأعلى لمدى التغير إلى الكمية الأصلية للمورد، وطرح الحد الأدنى لمدى التغير من الكمية الأصلية للمورد، وعلى النحو الأتي:

$$360-60 \leq b3 \leq 360+20$$

$$300 \leq b3 \leq 380$$

ملاحظة: إذا كان المتغير الراكد التابع لأحد القيود ضمن مزيج الحل الأساسي (داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية (زائدة أو فائضة) من هذا المورد، ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد مفتوح (غير محدد)، والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منها قيمة المتغير الراكد التابع للقيد في جدول الحل الأمثل. ولتوضيح هذه النقطة نعود إلى جدول الحل الأمثل الخاص بمجموعة الابراهيم، حيث نلاحظ أن المتغير الراكد التابع للمورد الثاني هو متغير أساسي وقيمته (10)، وهذا يعني وجود كمية زائدة من المورد الثاني وبمقدار (10) وحدات، وبالتالي فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية المورد الثاني مفتوح، وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلي (240) مطروحاً منها مقدار الزيادة (10)، فيكون مدى الإمكانية للمورد الثاني على النحو الأتي:

$$230 \leq b2 \leq \text{غير محدد}$$

4.5 إضافة متغير جديد Adding a new variable

إن إضافة أي متغير قرار جديد لمشكلة البرمجة الخطية لأي سبب كان، تتطلب إعادة حل المشكلة بالكامل، أو يتم الاعتماد على نتيجة الحل الأمثل إن توفرت، ويتم احتساب قيم عمود المتغير الجديد الذي تمت إضافته باستخدام الصيغة التالية:

القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل =

مصفوفة المتغيرات الراكدة في الحل الأمثل × عمود القيم الأساسية للمتغير الجديد

وبناءاً على هذه الصيغة يتم إعادة حساب قيم صف (Z) وصف (C-Z) واختبار مدى أمثلية الحل حسب طبيعة دالة الهدف، إن لم يكن الحل أمثل يجب الاستمرار في عملية الحل كما تعلمنا في الفصل الرابع.

إفترض أن مجلس إدارة مجموعة الابراهيم قرر إضافة منتج جديد باسم الحاسوب السريع (X_4) وبربح مقداره (20) دينار، وبمعاملات في القيود الثلاثة (1، 2، 4) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود (X_4) تتم كما يلي:

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & & X_4 & & \text{New } X_4 \text{ column} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -1.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: عند ضرب المصفوفات يجب التأكد من أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية، وتتم عملية الضرب من خلال ضرب قيم الصف الأول في المصفوفة الأول بالقيم المقابلة لها في العمود الأول في المصفوفة الثانية، وتجمع النتائج وتوضع على رأس العمود الأول في المصفوفة الناتجة، وهكذا (Dewhurst, 2002).

وبعد إدخال قيم عمود المتغير (X_4) الجديدة إلى جدول الحل الأمثل، يصبح الحل كما يلي:

Cj	40	30	25	20	0	0	0	
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	X_4	S_3	S_2	S_3	RHS
25 X_3	0	0.5	1	**0.5**	2.5	0	-0.5	70
0 S_2	0	0.5	0	**-0.5**	-0.5	1	-0.5	10
40 X_1	1	0.5	0	**0.5**	-1.5	0	0.5	30
Z	40	32.5	25	**32.5**	2.5	0	7.5	2950
C - Z	0	-2.5	0	**-12.5**	-2.5	0	-7.5	

نلاحظ من جدول الحل الأمثل الجديد، أن جميع قيم صف (C-Z) أقل من أو تساوي صفر، وهذا يعني أن الحل أمثل، ومزيج الحل الأساسي، وقيمة الربح لم يتغيرا. تشير هذه النتيجة إلى أن إضافة منتج جديد لم تؤثر في الربح، حيث بقيت قيمة الربح كما هي (2950) دينار، ولكن هذه الحالة ليست دائماً.

5.5 إضافة قيد جديد Adding a new constraint

إنسجاماً مع ما يفرزه الواقع المتغير الذي تعمل فيه منظمات الأعمال، تجد المنظمة نفسها أمام حالة معينة تتطلب منها إضافة قيد جديد يعبر عن التغير الحاصل، وهذا يحتاج إلى إعادة صياغة نموذج البرمجة الخطية الخاص بأحد المشاكل التي تبحث لها المنظمة عن حل. وبالتأكيد فإن إضافة قيد جديد لمشكلة البرمجة الخطية سيؤثر على مزيج الحل الأساسي، وعلى قيمة دالة الهدف. لتوضيح ذلك نفترض أن مجموعة الابراهيم ولأسباب خاصة بتطوير المنتجات، أدخلت القيد التالي الذي يتعلق باحتيجات الحواسيب من الأقراص الصلبة (Hard Disk):

$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$، وترغب المجموعة في معرفة تأثير إدخال القيد الجديد على الحل الأمثل.

لمعرفة تأثير دخول القيد الجديد على الحل الأمثل، نتبع الخطوات التالية:

أ. نحول القيد الجديد إلى الصيغة القياسية، وعلى النحو الأتي:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_4 = 300$$

ب. إن المتغير الراكد (S_4) يكون عند الحل الأولي، متغير أساسي داخل في الحل، وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى، هي على النحو الأتي:

3, 2, 2, 0, 0, 0, 1, 300

ج. يبين جدول الحل الأمثل لمثال مجموعة الابراهيم أن المتغيرين (X_1) و (X_3) دخلا الحل، لذلك نطبق عل صف المتغير الراكد (S_4) القاعدة المتعلقة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل، فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرين (X_1) و (X_3) على صف (S_4) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد، وعلى النحو الأتي:

$$3 - [(2)(0) + (3)(1)] = 0$$
$$2 - [(2)(0.5) + (3)(0.5)] = -0.5$$
$$2 - [(2)(1) + (3)(0)] = 0$$
$$0 - [(2)(2.5) + (3)(-1.5)] = -0.5$$
$$0 - [(2)(0) + (3)(0)] = 0$$
$$0 - [(2)(-0.5) + (3)(0.5)] = -0.5$$
$$1 - [(2)(0) + (3)(0)] = 1$$
$$300 - [(2)(70) + (3)(30)] = 70$$

بناءاً على هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل على النحو الأتي:

Cj		40	30	25	0	0	0	0	RHS
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_3	S_2	S_3	S_4	
25	X_3	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	0	70
0	S_2	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	0	10
40	X_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	0	30
0	S_4	0	-0.5	0	-0.5	0	-0.5	1	70
Z		40	32.5	25	2.5	0	7.5	7.5	2950
C - Z		0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5	-7.5	

نلاحظ من جدول الحل الأمثل الجديد، أن جميع قيم صف (C-Z) أقل من أو تساوي صفر، وهذا يعني أن الحل أمثل، لكن مزيج الحل الأساسي قد تغير بإضافة المتغير الراكد (S_4) إلى الحل، ولكن قيمة الربح لم تتغير. وتشير هذه النتيجة إلى أن إضافة قيد جديد لم تؤثر في الربح، حيث بقيت قيمة الربح كما هي (2950) دينار، ولكن هذه الحالة ليست دائماً.

6.5 التغير في معاملات (احتياجات) متغيرات القرار في القيود

يعكس هذا التغير التطور في التكنولوجيا المستخدمة، بحيث يتم إدخال تكنولوجيا جديد، أو تحسين مهارات العمال، أو إحداث تطوير وتغيير في طرق وأساليب الإنتاج، أو في مواصفات المنتج. إن مثل هذه التغيرات تؤثر دون شك في احتياجات المنتجات في مرافق العمل المختلفة، فالتغير في احتياجات المنتجات من الموارد المتاحة اللازمة للإنتاج يؤدي إلى تغير عوامل متغيرات القرار في القيود، وبالتالي لا بد من التعرف إلى أثر هذا التغير في الحل الأمثل الذي تم التوصل إليه بافتراضات معينة، إن معالجة هذا الموضوع خارج اهتمام هذا الكتاب، ولكن نكتفي بالقول أن إحداث أي تغيير في معاملات متغيرات القرار في القيود يتطلب إعادة الحل.

ملاحظة: بإمكان أي منظمة أعمال الاستفادة من المعلومات التي يقدمها تحليل الحساسية، بغض النظر عن طبيعة دالة الهدف.

7.5 النموذج المقابل Dual Model

لكل مشكلة برمجة خطية تتم صياغتها بنموذج البرمجة الخطية نموذجان، يسمى الأول: النموذج الأولي The Primal Model، والثاني بالنموذج المقابل (الثنائي) The Dual Model، والحل الأمثل لأي منها يناظر الحل الأمثل للنموذج الأخر، فيتم استخدام النموذج الأسهل لإيجاد الحل.

يحتوي الحل المقابل على عدد من المعلومات الاقتصادية التي تهم الإدارة، ويمكن إيجاد الحل المقابل بشكل أسهل وأسرع من النموذج الأولي، حيث أن عدد مرات الإعادة أو خطوات الحل تكون أقل من تلك اللازمة لحل النموذج الأولي، وبشكل عام

عندما يكون عدد متغيرات القرار أقل من عدد القيود فإنه من المفيد حل المشكلة على أساس الحل المقابل (الثنائي).

1.7.5 صياغة النموذج المقابل

فيما يلي خطوات صياغة النموذج المقابل

1. تحويل طبيعة دالة الهدف من تعظيم (Max) في النموذج الأولي إلى تخفيض (Min) في النموذج المقابل، والعكس صحيح.

2. معاملات متغيرات القرار في دالة هدف النموذج الأولي تصبح قيم الطرف الأيمن (الكميات) في قيود النموذج المقابل، أي أن عدد القيود في النموذج المقابل تساوي عدد متغيرات القرار في النموذج الأولي.

3. قيم الطرف الأيمن (الكيات) في قيود النموذج الأولي تصبح معاملات متغيرات القرار في دالة هدف النموذج المقابل، أي أن عدد متغيرات القرار في النموذج المقابل تساوي عدد قيود النموذج الأولي.

4. تكوين قيود النموذج المقابل:

أ. قيم عمود معاملات متغيرات القرار في قيود النموذج الأولي تمثل قيم معاملات متغيرات القرار في الطرف الأيسر لقيود النموذج المقابل. أي أن قيم العمود الأول في النموذج الأولي تمثل صف معاملات متغيرات القرار في القيد الأول للنموذج المقابل، و قيم العمود الثاني في النموذج الأولي تمثل صف معاملات متغيرات القرار في القيد الثاني للنموذج المقابل، ... وهكذا.

ب. تغيير إشارات القيود في النموذج الأولي لكي تصبح في النموذج المقابل على النحو الأتي:

النموذج الأولي	النموذج المقابل
أقل من أو يساوي	أكبر من أو يساوي
أكبر من أو يساوي	أقل من أو يساوي

وفي حالة وجود قيد بإشارة يساوي (=) في النموذج الأولي، يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي (≥)، والأخر بإشارة أكبر من أو يساوي (≤)، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أكبر من أو يساوي (≤) إلى قيد إشارته أقل من أو يساوي (≥) عن طريق ضرب القيد الأكبر أو يساوي في (1-)، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تخفيض (Min) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أقل من أو يساوي (≥) إلى قيد إشارته أكبر من أو يساوي (≤) عن طريق ضرب القيد الأقل أو يساوي في (1-). وعلى أية حال يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.

قاعدة: إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) يجب أن تكزن جميع القيود بإشارة أقل من أو يساوي، وفي حال وجود قيد إشارته أكبر من أو يساوي يتم تحويله إلى قيد إشارته أقل من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأكبر أو يساوي في (1-). أما إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تخفيض (Min) يجب أن تكزن جميع القيود بإشارة أكبر من أو يساوي، وفي حال وجود قيد إشارته أقل من أو يساوي يتم تحويله إلى قيد إشارته أكبر من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأقل أو يساوي في (1-).

مثال (5- 2): حول نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي إلى النموذج المقابل:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2 + 9X_3$$

St.

$$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 16$$

$$7X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 25$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل: بحسب القواعد أعلاه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$\text{Min } W = 16Y_1 + 25Y_2$

St.

$1Y_1 + 7Y_2 \geq 4$

$1Y_1 + 5Y_2 \geq 5$

$2Y_1 + 3Y_2 \geq 9$

$Y_1, Y_2 \geq 0$

مثال (5- 3): أوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$

St.

$3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$-1X_1 + 2X_2 \geq 1$

$2X_1 - 5X_2 = 1$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل: نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل (أقل من أو يساوي) فنحصل على النموذج المكافئ التالي:

$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$

St.

$3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$1X_1 - 2X_2 \leq -1$

$2X_1 - 5X_2 \leq 1$

$-2X_1 + 5X_2 \leq -1$

$X_1, X_2 \geq 0$

بحسب القواعد أعلاه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$$\text{Min } W = 15Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4$$

St.

$$3Y_1 + 1Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 \geq 2$$

$$5Y_1 - 1Y_2 - 5Y_3 + 5Y_4 \geq 3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

مثال (5- 4): أوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$$

St.

$$2X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$-2X_1 + 2X_2 \geq 4$$

$$2X_1 + 2X_2 = 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل (أكبر من أو يساوي) فنحصل على النموذج المكافئ التالي:

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 10X_2$$

St.

$$-2X_1 - 4X_2 \geq -24$$

$$-2X_1 + 2X_2 \geq 4$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 8$$

$$-2X_1 - 2X_2 \geq -8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بحسب القواعد أعلاه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$$Max\ W = -24Y_1 + 4Y_2 + 8Y_3 - 8Y_4$$

St.

$$-2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 \leq 5$$

$$-4Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4 \leq 10$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

2.7.5 حل النموذج المقابل

إن الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية يحصل عند تحقيق شرطين أساسين، هما:

1. شرط الأمثلية: ويتحقق عندما تكون جميع قيم صف (C-Z) أقل من أو تساوي صفر في حال المسألة تعظيم (Max)، أو أن تكون جميع قيم صف (C-Z) أكبر من أو تساوي صفر في حال المسألة تخفيض (Min).
2. أن يكون الحل ممكناً: ويتحقق عندما تكون جميع قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل موجبة (غير سالبة).

ولتوضيح الطريقة المبسطة المقابلة، سوف نقوم بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي إلى النموذج المقابل، وإيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة المبسطة.

$$Max\ Z = 40X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

St.

$$2X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 900$$

$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 400$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 600$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

النموذج المقابل له هو:

$$Min\ W = 900Y_1 + 400Y_2 + 600Y_3$$

St.

$$2Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 \geq 40$$

$$5Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \geq 30$$

$$10Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 \geq 20$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

وفيما يلي جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي:

Max		40	30	20	0	0	0	RHS الكميات
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	7	1	-1	0	500
30	X_2	0	1	0.5	0	0.25	-0.125	25
40	X_1	1	0	0.25	0	-0.125	0.3125	137.5
Zj		40	30	25	0	2.5	8.75	6250
Cj - Zj		0	0	-5	0	-2.5	-8.75	

والجدول التالي يبين الحل الأمثل للنموذج المقابل (تم استخدام الحاسوب في عملية الحل):

Cj		900	400	600	0	0	0	RHS
Basic Variables		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	-7	0	0	-0.25	-0.5	1	5
400	Y_2	1	1	0	0.125	-0.25	0	2.5
600	Y_3	0	0	1	-0.3125	0.125	0	8.75
W		400	400	600	-137.5	-25	0	6.250
C - W		0	-200	0	-2.5	0	-7.5	

نلاحظ من الصف الأخير أن جميع قيم صف (C-W) أكبر من أو تساوي صفر، وهذا يعني أن الحل أمثل، حيث:

Y_1 = صفر. $Y_2 = 2.5$. $Y_3 = 8.75$.

وأن قيمة الحل الأمثل $W = 6250$، وهذه القيمة هي نفس قيمة الحل الأمثل للنموذج الأولي ولنفس المثال والتي كان حلها كما يأتي:

$X_1 = 137.5$. $X_2 = 25$. $X_3 =$ صفر. وأن قيمة الحل الأمثل $Z = 6250$،

مما تقدم يمكن وضع الخاصية التالية: إذا كان هناك حل آمثل للنموذج المقابل، فإن هناك حل أمثل للنموذج الأولي، والعكس صحيح. كذلك فإن قيمة الحل الأمثل Z متساوي في الحلين، أيضاً يمكن القول بأن قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل للنموذج المقابل، مساوية لأسعار الظل في جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي. أي أن قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل للنموذج المقابل تبين مقدار الوحدة الإضافية من الموارد أو المدخلات.

8.5 تمارين محلولة

1. قام مدير العمليات في مؤسسة الليث لصناعة البرمجيات ببناء نموذج البرمجة الخطية التالي بهدف مساعدة المؤسسة في تخفيض تكاليف إنتاج نوعين من البرمجيات.

Min $Z= 5X_1 + 6X_2$

St.

$1X_1 + 1X_2 = 1000$

$1X_1 \leq 300$

$1X_2 \geq 150$

$X_1, X_2 \geq 0$

وفيما يلي جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة

Cj		5	6	0	0	M	M	RHS
Basic Variables		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
0	S_1	0	0	-1	1	1	-1	550
5	X_1	1	0	1	0	0	0	300
6	X_2	0	1	-1	0	1	0	700
Z		5	6	-1	0	6	0	5700
C - Z		0	0	1	0	M-6	M	

1. مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف:

معامل X_1: $6 \leq C_1 \leq$ **غير محدد**

معامل X_2: **غير محدد** $5 \leq C_2 \leq$

2. مدى الإمكانية لقيم الطرف الأيمن في القيود:

القيد الأول: **غير محدد** $450 \leq b1 \leq$

القيد الثاني: $0 \leq b2 \leq 850$

القيد الثالث: $700 \leq b3 \leq$ **غير محدد**

توضيح (1): إذا كانت إشارة القيد يساوي (=)، أو أكبر من أو يساوي، فإن مدى التغير له هو عبارة عن حاصل قسمة قيم عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود المتغير الوهمي التابع للقيد الذي نبحث في إيجاد مدى الإمكانية لطرفه الأيمن

3. سعر الظل:

المورد الأول = **-6**

المورد الثاني = **1**

المورد الثالث = صفر

توضيح (2): إذا كانت المسألة تقليل (Minimization)، فإن سعر الظل هو:

قيمة صف (Z) السالبة المقابلة للمتغير الوهمي إذا كانت إشارة القيد يساوي.

قيمة صف (Z) السالبة المقابلة للمتغير الفائض إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي.

قيمة صف (Z) الموجبة المقابلة للمتغير الزائد إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي.

2. حول نموذج البرمجة الخطية في التمرين السابق إلى الصيغة المقابلة، وأوجد الحل الأمثل للنموذج

المقابل باستخدام طريقة الحل المبسطة.

النموذج الأولي للتمرين السابق هو:

Min $Z= 5X_1 + 6X_2$

St.

$1X_1 + 1X_2 = 1000$

$1X_1 \leq 300$

$1X_2 \geq 150$

$X_1, X_2 \geq 0$

نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل (أكبر من أو يساوي) فنحصل على النموذج المكافئ التالي:

Min $Z = 5X_1 + 6X_2$

St.

$1X_1 + 1X_2 \geq 1000$

$-1X_1 - 1X_2 \geq -1000$

$-1X_1 \geq -300$

$X_2 \geq 150$

$X_1, X_2 \geq 0$

بحسب القواعد أعلاه فإن النموذج المقابل لهذه المشكلة هو:

$$\textbf{Max } W = 1000Y_1 - 1000Y_2 - 300Y_3 + 150Y_4$$

St.

$$1Y_1 - 1Y_2 - 1Y_3 \leq 5$$

$$1Y_1 - 1Y_2 + 1Y_4 \leq 6$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$$

والجدول التالي يبين الحل الأمثل للنموذج المقابل (تم استخدام الحاسوب في عملية الحل):

Cj	1000	-1000	-300	150	0	0	
Basic Variables	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	RHS
1000 Y_1	1	-1	0	1	0	1	6
-300 Y_3	0	0	1	1	-1	1	1
W	1000	-1000	-300	700	300	700	5700
C - W	0	0	0	-550	-300	-700	

نلاحظ من الصف الأخير أن جميع قيم صف (C-W) أقل من أو تساوي صفر، وهذا يعني أن الحل أمثل، حيث:

$Y_1 = 6$. $Y_2 =$ صفر. $Y_3 = 1$ $Y_4 =$ صفر

وأن قيمة الحل الأمثل $W = 5700$، وهذه القيمة هي نفس قيمة الحل الأمثل للنموذج الأولي المبين في التمرين (1) والتي كان حلها كما يأتي:

$X_1 = 300$. $X_2 = 700$. وأن قيمة الحل الأمثل $Z = 5700$،

9.5 تمارين الفصل الخامس

1. يبين الجدول التالي الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Max\ Z= 5X_1 + 6X_2 + 4X_3$$

St.

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 120$$

$$1X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq 50$$

$$1X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 30$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

والجدول التالي يبين الحل الأمثل لهذه المشكلة

Cj	5	6	4	0	0	0	RHS
Basic Variables	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_3	0	4	0	-2	7	1	80
4 X_3	0	2	1	-1	3	0	30
5 X_1	1	0	0	1	-2	0	20
Z	5	8	4	1	2	0	220
C - Z	0	-2	0	-1	-2	0	

المطلوب إيجاد:

1. مدى الأمثلية لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.
2. مدى الإمكانية للمورد الأول (Q_1).
3. مدى الإمكانية للمورد الثاني (Q_3).
4. ما هو سعر الظل للمورد الثاني.
5. إذا تغيرت كمية المورد الثاني من (50) إلى (55)، أوجد قيمة (Z) عند الحل الأمثل، والقيم الجديدة لمتغيرات الحل الأساسي عند الحل الأمثل.

2. يبين الجدول التالي الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$\text{Max } Z = 15X_1 + 20X_2 + 10X_3$$

St.

$$2X_1 + 2X_3 \leq 8$$

$$0.5X_1 + 2X_2 + 1X_3 \leq 3$$

$$1X_1 + 1X_2 + 2X_3 \leq 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

والجدول التالي يبين الحل الأمثل لهذه المشكلة

Cj		15	20	10	0	0	0	RHS
Basic Variables		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
15	X_1	1	0	1	0.5	0	0	4
20	X_2	0	1	0.25	-0.125	0.5	0	0.5
0	S_3	0	0	0.75	-0.375	-0.5	1	1.5
Z		15	20	20	5	10	0	70
C - Z		0	0	-10	-5	-10	0	

المطلوب إيجاد:

1. مدى الأمثلية لمعامل X_3.
2. مدى الإمكانية.
3. ما هو سعر الظل للمورد الثاني.
4. إذا تغيرت كمية المورد الأول من (8) إلى (10)، أوجد قيمة (Z) عند الحل الأمثل، والقيم الجديدة لمتغيرات الحل الأساسي عند الحل الأمثل
5. إفترض أنه تم إضافة متغير جديد هو (X_4) وبربح مقداره (5) دينار، وبمعاملات في القيود الثلاثة (2، 2، 2) على التوالي، ما تأثير ذلك على الحل الأمثل.

3. يبين الجدول التالي الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$\text{Max } Z = 14X_1 + 14.5X_2 + 18X_3$

ST

$1X_1 + 2X_2 + 2.5X_3 \leq 50$ .... المورد الأول

$1X_1 + 1X_2 + 1.5X_3 \leq 30$ .... المورد الثاني

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Basic Variables		14	14.5	18	0	0	RHS
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
14.5	X_2	0	1	1	1	-1	20
14	X_1	1	0	0.5	-1	2	10
Z		14	14.5	21.5	0.5	13.5	430
C - Z		0	0	-3.5	-0.5	-13.5	

المطلوب إيجاد:

1. مدى الأمثلية.
2. مدى الإمكانية.
3. ما تأثير إضافة القيد التالي [$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 60$] على الحل الأمثل.

4. يبين الجدول التالي الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي

$\text{Max } Z = 160X_1 + 200X_2$

St.

$2X_1 + 4X_2 \leq 40$

$18X_1 + 18X_2 \leq 216$

$24X_1 + 12X_2 \leq 240$

$X_1, X_2 \geq 0$

Cj		160	200	0	0	0	
	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Quantity
200	X_2	0	1	0.5	-1/18	0	8
160	X_1	1	0	-0.5	1/9	0	4
0	S_3	0	0	6	-2	1	48
	Z_j	160	200	20	20/3	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	-20	-20/3	0	

المطلوب:

أ. إيجاد مدى الأمثلية لمعامل X_1.

ب. إيجاد مدى الإمكانية للمورد الثاني (Q_2).

ج. فسر قيم أسعار الظل لكل مورد من الموارد الثلاثة ؟

5. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة المقابلة

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 7X_2 + 9X_3$$

St.

$$20X_1 + 10X_2 + 30X_3 \geq 300$$

$$40X_1 + 5X_2 + 10X_3 \geq 200$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

6. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة المقابلة

$$\text{Max } Z = 30X_1 + 50X_2 + 40X_3$$

St.

$$5X_1 + 7X_2 + 3X_3 \leq 1000$$

$$4X_1 + 6X_2 + 8X_3 \leq 1200$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

7. أوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$\text{Min } Z = 1X_1 + 2X_2$

St.

$4X_1 + 8X_2 \leq 48$

$-4X_1 + 4X_2 \geq 8$

$4X_1 + 4X_2 = 16$

$X_1, X_2 \geq 0$

8. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة المقابلة، وأوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحل المبسطة المقابلة

$\text{Max } Z = 20X_1 + 10X_2$

St.

$2X_1 + 5X_2 \leq 100$

$2X_1 + 1X_2 \leq 36$

$3X_1 + 3X_2 \leq 45$

$X_1, X_2 \geq 0$

9. حول نموذج البرمجة الخطية التالي إلى الصيغة المقابلة، وأوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الحل المبسطة المقابلة، وفسر الحل من حيث النموذج الأولي.

$\text{Max } Z = 160X_1 + 200X_2$

St.

$2X_1 + 4X_2 \leq 40$

$18X_1 + 18X_2 \leq 216$

$24X_1 + 12X_2 \leq 240$

$X_1, X_2 \geq 0$

أسئلة الاختيار من متعدد **Multiple Choice Question**

يبين الجدول التالي الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي

$\text{Max } Z = 400X_1 + 500X_2$

ST

$1X_1 + 2X_2 \leq 10$

$6X_1 + 6X_2 \leq 36$

$8X_1 + 4X_2 \leq 40$

$X_1, X_2 \geq 0$

Cj		400	500	0	0	0	
	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Quantity
500	X_2	0	1	1	-1/6	0	4
400	X_1	1	0	-1	1/3	0	2
0	S_3	0	0	4	-2	1	8
	Z_j	400	500	100	50	0	
	$C_j - Z_j$	0	0	-100	-50	0	

أجب عن الأسئلة من (1) إلى (6)

1. مدى الأمثلية لمعامل X_2 :

أ. $500 \leq C_2 \leq 400$

ب. $800 \leq C_2 \leq 400$

ج. $400 \leq C_2 \leq 800$

د. $250 \leq C_2 \leq 500$

2. مدى الإمكانية للمورد الأول (Q_1):

أ. $8 \leq Q_1 \leq 12$

ب. $10 \leq Q_1 \leq 8$

ج. $5 \leq Q_1 \leq 10$

د. $8 \leq Q_1 \leq 15$

3. مدى الإمكانية للمورد الثاني (Q_2):

أ. $40 \leq Q_2 \leq 50$

ب. $30 \leq Q_2 \leq 40$

ج. $30 \leq Q_2 \leq 45$

د. $36 \leq Q_2 \leq 40$

4. إذا تغيرت كمية المورد الأول من (10) إلى (12)، فإن قيمة (Z) عند الحل الأمثل تصبح.

أ. 3000 ب. 2000 ج. 2800 د. 3200

5. ما هي قيمة سعر الظل للمورد الثالث؟

أ. 50 ب. 100 ج. 8 د. صفر

6. افترض أن تم إضافة متغير جديد بمعامل 600 في دالة الهدف، وبمعاملات (3، 4، و6) في القيود الثلاثة على التوالي، فإن ذلك سيؤدي إلى:

أ. زيادة في قيمة الربح.

ب. تخفيض في قيمة الربح.

ج. عدم التأثير على الربح.

د. لا شيء مما ذكر.

7. توجد قيم سعر الظل في:

أ. صف (Z) في جدول الحل الأمثل.

ب صف (C-Z) في جدول الحل الأمثل.

ج. عمود قيم الطرف الأيمن في جدول الحل الأمثل.

د. صف (Z) في جدول الحل الأولي.

8. إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) يجب أن تكون جميع القيود في النموذج المقابل بإشارة:

أ أكبر من أو يساوي.

ب. يساوي.

ج. أقل من أو يساوي.

د. تعتمد على طبيعة القيد

9. عدد القيود في النموذج المقابل تساوي:

أ. عدد القيود في النموذج الأولي.

ب. عدد متغيرات القرار في النموذج الأولي.

ج. عدد متغيرات القرار في الصيغة القياسية.

د. عدد القيود في النموذج الأولي $- 1$.

10. إذا كانت المسألة تقليل (Minimization)، فإن سعر الظل هو:

أ. قيمة صف (Z) السالبة المقابلة للمتغير الوهمي إذا كانت إشارة القيد يساوي.

ب. قيمة صف (Z) السالبة المقابلة للمتغير الفائض إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي.

ج. قيمة صف (Z) الموجبة المقابلة للمتغير الزائد إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي.

د. جميع ما ذكر صحيح.

10.5 مصادر الفصل الخامس

1. الطراونة، محمد، وعبيدات، سليمان (2009). مقدمة في بحوث العمليات. الأردن، عمان: دار المسيرة للنشر والتوزيع.

2. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., Williams, Thomas A., & Martin, R. Kipp (2007). **An Introduction to Management Science: A Quantitative Approach to Decision Making.** (12th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company..

3. Hillier, Fredrick S., Hillier, Mark S., & Hillier, Mark. (2002). **Introduction to Management Science: A Modeling and case studies Approach.** (2ed ed.), UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin.

4. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research.** (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill.

5. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management.** (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

6. Stevenson, William J., & Ozgur, Ceyhun (2006). **Introduction to Management Science with Spreadsheets.** Maidenhead, UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin

7. Taha, Hamdy A., (2007). **Operations Research: An Introduction.** (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

الفصل السادس

نماذج النقل

Transportation Models

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد نهاية هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. صياغة النموذج الرياضي (نموذج البرمجة الخطية) لمشكلة النقل.
2. ايجاد الحل الأولي لمشكلة النقل باستخدام إحدى الطرق التالية: طريقة الركن الشمالي الغربي، طريقة التكلفة الأقل، أو طريقة فوجل التقريبية.
3. ايجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل باستخدام إحدى الطرق التالية: طريقة حجر النقل أو طريقة التوزيع المعدلة.
4. التمييز بين الحالات الخاصة في النقل.

الفصل السادس

نماذج النقل

Transportation Models

1.6 المقدمة

اتسع استخدام أسس ومفاهيم البرمجة الخطية ليشمل نواحي متعددة في سبيل اتخاذ القرارات، ومن أهم الطرق التي تم تطويرها بناء على هذا الأسلوب هما نموذجي النقل والتخصيص (التعيين).

تعد مشكلة النقل من المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية، والمشتقة أصلاً من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية. الهدف من استخدام نماذج النقل هو إيجاد الأسلوب الأمثل لتوزيع (نقل أو شحن) سلعة أو مادة ما من مناطق إنتاجها (عرضها) إلى مراكز استلامها أو استهلاكها (طلبها) بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن. ويرجع السبب في تسمية هذه المشكلة بالنقل إلى تعدد مراكز الإنتاج وتعدد المناطق التي تصل المنتجات إليها، ويزداد تعقيد هذه المشاكل مع تعدد مراكز الاستلام (الاستهلاك)، حيث أن زيادة هذه المراكز يؤدي إلى زيادة البدائل المتاحة بحيث يصعب تقييمها والوصول إلى أدنى التكاليف.

إن الشرط الأساسي الذي يميز هذا النوع من المشاكل هو أن خطة النقل المثلى ينبغي فيها أن لا يتم الطلب من أي مصدر توزيع أكثر مما يتوفر فيه من السلع، كما أن أي جهة لا يمكن أن تحصل على كمية من السلع أكثر مما تحتاجه فعلاً.

2.6 النموذج الرياضي العام (نموذج البرمجة الخطية) لمشكلة النقل

1.2.6 متطلبات بناء نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل

أ. وجود مجموعة من مراكز أو مصادر الإنتاج، وتمثل جانب العرض Supply.

ب. وجود مجموعة من مراكز الاستلام أو الاستهلاك، وتمثل جانب الطلب Demand.

ج.	توفر مجموعة من بدائل النقل الممكنة لكل بديل منها تكلفة معينة وقابلية استيعابية معينة.

د.	وجود هدف تسعى المنظمة أو صانع القرار إلى تحقيقه، وغالباً ما يتعلق الهدف بتخفيض تكاليف النقل.

ه.	الرموز المستخدمة في النموذج الرياضي العام لمشكلة النقل هي:

X_{ij}: الكمية المنقولة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الطلب (j).

i: رمز مراكز الإنتاج (العرض) أو مراكز التوزيع (المصادر).

j : رمز مركز الاستلام (الطلب) أو مراكز الاستهلاك (التسويق).

C_{ij}: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الطلب (j).

S_i: العرض أو الطاقة الإنتاجية لمركز الإنتاج (i).

D_j: الطلب أو عدد الوحدات التي يحتاجها مركز الطلب (j).

ويتكون نموذج البرمجة الخطية للنقل من نوعين من القيود الأساسية هما:

1. قيود الكميات المتاحة عند مراكز الإنتاج (العرض).

2. قيود الكميات المطلوبة عند مراكز الاستلام (الطلب).

فإذا كان هناك (m) من مراكز الإنتاج، و(n) من مراكز الاستلام، فإن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل هي على النحو الأتي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$S.T$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, ..., m\ Supply$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, ..., n\ Demand$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad for\ all\ i\ and\ j.$$

لتوضيح عناصر ومكونات نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل لا بد من بناء جدول النقل الذي على أساسه تتم عملية بناء وصياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

الشكل (6- 1) الصيغة العامة لجدول النقل

إلى / من	D_1	D_2	...	D_n	العرض Supply
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
:	:	:	:	:	:
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
الطلب Demand	b_1	b_2	...	b_n	Σai / Σbj

وفيما يلي تعريف برموز ومكونات الجدول السابق:

m: عدد مراكز الإنتاج (التوزيع)

n: عدد مراكز الاستلام (الاستهلاك).

X_{mn}: كمية المنتجات المنقولة من مراكز الإنتاج (m) إلى مراكز الاستلام (n).

C_{mn}: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتجات من مراكز الإنتاج (m) إلى مراكز الاستلام (n).

am : الكمية المعروضة أو المنقولة من مراكز الإنتاج (m).

bn : الكمية المطلوبة في مراكز الاستلام (n).

استناداً إلى ما تقدم تتم عملية بناء نموذج البرمجة الخطية للنقل وذلك كما يلي:

1. دالة الهدف Objective function

$$Min\ Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots.. + C_{mn}X_{mn}$$

إن عدد متغيرات القرار في دالة الهدف لنموذج النقل يساوي عدد مراكز الإنتاج مضروباً في عدد مراكز الاستلام.

2. القيود الأساسية Constraints

أ. قيود مراكز الإنتاج (العرض)

$$X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = a_1 \rightarrow S_1$$
$$X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} = a_2 \rightarrow S_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + \ldots + X_{mn} = a_m \rightarrow S_m$$

ب. قيود مراكز الاستلام (الطلب)

$$X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = b_1 \rightarrow d_1$$
$$X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = b_2 \rightarrow d_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = b_n \rightarrow d_n$$

إن عدد القيود الأساسية في نموذج النقل يساوي عدد مراكز الإنتاج زائداً عدد مراكز الاستلام.

ج. قيد عدم السلبية Non Negativity

$$X_{11}\ , X_{12}\ , \ldots , X_{mn} \geq 0$$

ملاحظة (1)

عندما يكون مجموع الكمية المعروضة مساوياً لمجموع الكمية المطلوبة يلجأ عدد من كتاب الأساليب الكمية إلى وضع إشارة المراجحة لقيود مراكز الإنتاج أقل من أو يساوي (≤) بدلاً من يساوي (=) على اعتبار أن العملية الإنتاجية مستمرة لا تتوقف، وأن الكمية المعروضة غير محددة. أما فيما يخص قيود مراكز الاستلام فإن الإشارة (=) لأن الطلب غالباً محدد بكمية معينة وفي كلا الحالتين يبقى الحل الأمثل نفسه (Anderson, Sweeney, & Williams, 2007, 402).

ملاحظة (2)

عندما يكون مجموع الكمية المعروضة أقل من مجموع الكمية المطلوبة توضع إشارة المراجحة لقيود مراكز الإنتاج (العرض) يساوي (=)، ولقيود مراكز الاستلام (الطلب) فإن الإشارة أقل من أو يساوي (≤)، أما عندما يكون مجموع الكمية المعروضة أكبر من مجموع الكمية المطلوبة فإن إشارة المراجحة لقيود مراكز الإنتاج (العرض) أقل من أو يساوي (≤)، ولقيود مراكز الاستلام (الطلب) فإن الإشارة يساوي (=) (Taylor III, 2007, 225).

مثال (6- 1): تمتلك الشركة العربية الأردنية لصناعة الثلاجات ثلاثة مصانع S1، وS2، وS3، الطاقة الإنتاجية لكل منها (40) ثلاجة. ترغب الشركة بتزويد إنتاجها من الثلاجات إلى ثلاثة مراكز تسويق تابعة لها D1، وD2، وD3، حيث كان حجم الطلب لكل مركز تسويق هو (60)، و(30)، و(30) ثلاجة على التوالي. تكلفة نقل الثلاجة الواحدة من S1 إلى كل من D1، وD2، وD3 هي (10)، (12)، و(20) دينار على التوالي. ومن S2 إلى D1، وD2، وD3 هي (18)، (24)، و(16) دينار على التوالي. ومن S3 إلى D1، وD2، وD3 هي (14)، (22)، و(11) دينار على التوالي.

لصياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل يجب في البداية بناء جدول النقل من البيانات الواردة في المسألة كما يلي:

الشكل (6- 2) جدول نقل الشركة العربية الأردنية لصناعة الثلاجات

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	X_{11} 10	X_{12} 12	X_{13} 20	40
S2	X_{21} 18	X_{22} 24	X_{23} 16	40
S3	X_{31} 14	X_{32} 22	X_{33} 11	40
الطلب	60	30	30	120

X_{ij} هي متغيرات القرار وعددها = عدد مراكز الإنتاج × عدد مراكز الاستلام

$= 3 \times 3 = 9$

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = 10X_{11} + 12X_{12} + 20X_{13} + 18X_{21} + 24X_{22} + 16X_{23} + 14X_{31} + 22X_{32} + 11X_{33}$$

القيود

- قيود مراكز الإنتاج

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 40$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 40$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 40$$

- قيود مراكز الاستلام

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 60$$

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 30$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 30$

- قيد عدم السلبية

$X_{ij} \geq 0$

لذلك يكون شكل نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل السابقة، على النحو الأتي:

$$\textbf{Min } Z = 10 X_{11} + 12 X_{12} + 20 X_{13} + 18 X_{21} + 24 X_{22} + 16 X_{23} + 14 X_{31} + 22 X_{32} + 11 X_{33}$$

Subject to.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 40$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 40$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 40$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 60$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 30$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 30$$

$$X_{ij} \geq 0$$

3.6 طرق حل مشاكل النقل

يتضمن حل مشكلة النقل مرحلتين أساسيتين هما:

أولاً: تحديد الحل الأولي الأساسي الممكن باستخدام إحدى الطرق التالية:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي Northwest Corner Method.

ب. طريقة التكلفة الأقل Least Cost Method.

ج. طريقة التكلفة الفرضية (طريقة فوجل التقريبية) Vogel's Approximation Method (VAM).

ثانياً: تحديد الحد الأمثل باستخدام إحدى الطرق التالية:

أ. طريقة المسار المغلق (حجر النقل) Stepping – Stone Method

ب. طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method (MODI)

وفيما يلي توضيح لهذه الطرق

1. طريقة الركن الشمالي الغربي

تعد هذه الطريقة من أبسط الطرق التي بموجبها يتم الحصول على الحل الأولي الأساسي الممكن. ولا تستند هذه الطريقة إلى أي منطق أو مفهوم علمي في توزيع الكميات المنقولة، ولتوضيح آلية التوزيع حسب هذه الطريقة نستعين بمثال الشركة العربية لصناعة الثلاجات والجدول التالي يبين بيانات المشكلة.

الشكل (6- 3) بيانات مشكلة النقل لدى الشركة العربية الأردنية لصناعة الثلاجات

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	10	12	20	40
S2	18	24	16	40
S3	14	22	11	40
الطلب	60	30	30	120

تبدأ عملية الحل باستخدام العلاقة الرياضية التالية:

$$X_{mn} = \text{Min}(a_m , b_n) \rightarrow \text{Min (Supply , Demand)}$$

أي عند البدء في عملية التوزيع نقارن بين الكمية المطلوبة (b_n)، والكمية المعروضة (a_m) ونخصص في الخلية المستهدفة الكمية الأقل.

إن بداية الحل تكون من (S_1)، وبالتحديد من الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي أي خلية (S_1D_1) وذلك بعد التأكد من أن النقل مغلق أي أن الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة.

من الجدول السابق نلاحظ بأن الكمية المطلوبة تساوي الكمية المعروضة حيث أن:

$40 + 40 + 40 = 60 + 30 + 30 = 120$

وتتمثل آلية التوزيع فيما يلي:

نأخذ الخلية الأولى التي تقع في الركن الشمالي الغربي وهي الخلية $(S1, D1)$ ونطبق العلاقة الرياضية المشار إليها سابقاً:

$X_{mn} = \text{Min}\ (a_m, b_n)$

$X_{11} = \text{Min}\ (40, 60) = 40$

لذلك فإن قيمة المتغير (X_{11}) تساوي (40) وتبقى هنالك (20) وحدة مطلوبة لدى (D_1) يجب توفيرها. في هذه الحالة يتم الانتقال عمودياً إلى الأسفل، أي إلى الخلية (S_2, D_1) ونقارن الكمية المتاحة لدى المصدر (S_2) بالكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب (D_1) ونختار الأقل ونخصصها للخلية (S_2, D_1).

$X_{21} = \text{Min}\ (40, 20) = 20$

نلاحظ هنا أن جميع الكميات التي احتاجها مركز الطلب (D_1) قد تم توفيرها بالكامل لذلك ننتقل أفقياً إلى مركز الطلب الثاني (D_2) أي إلى الخلية (S_2, D_2)، ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز (D_2) بالكمية المتاحة لدى المصدر (S_2) ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, D_2).

$X_{22} = \text{Min}\ (20, 30) = 20$

نلاحظ هنا أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر (S_2) قد نفذت بالكامل، لذلك ننتقل عمودياً إلى الخلية (S_3, D_2) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها مركز الطلب (D_2) بالكمية المتاحة لدى المصدر (S_3) ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_3, D_2).

$X_{32} = \text{Min}\ (40, 10) = 10$

وبذلك تم سد احتياج مركز الطلب (D_2) بالكامل، لذلك ننتقل أفقياً إلى مركز الطلب الأخير (D_3) أي إلى الخلية (S_3, D_3) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز (D_3) بالكمية المتاحة لدى المصدر (S_3) ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_3, D_3).

$$X_{33} = \text{Min}\ (30, 30) = 30$$

تشير هذه الحالة إلى أنه تم سد كامل احتياج مركز الطلب (D_3) من جميع الكميات المتاحة لدى المصدر (S_3).

عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول الحل الأساسي الأولي لمشكلة النقل كالآتي.

الشكل (6- 4) التوزيع حسب طريقة الركن الشمالي الغربي

إلى / من	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10]	[12]	[20]	40
S2	20 [18]	20 [24]	[16]	40
S3	[14]	10 [22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

إن الحل الأولي هو:

$$X_{11} = 40, X_{21} = 20, X_{22} = 20, X_{32} = 10, X_{33} = 30$$

وإن عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا الممتلئة) يجب أن يساوي عدد المصادر + عدد مراكز الطلب – 1 وهنا:

$$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

واستناداً إلى ما تقدم فإن التكلفة الأولية Initial Cost لعمليات نقل البضاعة هي:

$$\text{Initial Cost} = 40\ (10) + 20\ (18) + 20\ (24) + 10\ (22) + 30\ (11)$$
$$= 1790 \text{ دينار}$$

2. طريقة الكلفة الأقل The Least Cost Method

تعتمد هذه الطريقة على مبدأ تنفيذ عمليات النقل والتوزيع على أساس الأخذ بأقل تكلفة نقل متحققه بين مراكز الإنتاج (المصادر) ومراكز الاستلام. فيتم أولاً نقل كمية من المواد من أحد مراكز الإنتاج إلى أحد مراكز الاستلام التي تكون فيه تكلفة نقل الوحدة الواحدة أقل ما يمكن مقارنة مع جميع تكاليف النقل في جدول النقل بعد ذلك يتم الانتقال إلى الخلية ذات التكلفة الأعلى تدريجياً لحين إكمال نقل جميع الكميات المعروضة في مراكز الإنتاج.

ولتوضيح خطوات طريقة التكلفة الأقل سيتم الاعتماد على مثال الشركة العربية لصناعة الثلاجات.

1. من جدول النقل السابق (الشكل (6- 3) نلاحظ بأن أقل تكلفة هي (10) وهي تقابل المصدر (S_1) ومركز الطلب (D_1). لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر (S_1) مع ما يحتاجه مركز الطلب (D_1) ثم نختار أقل الكميتين، وتخصصها للخلية (S_1, D_1).

$X_{11} = \text{Min}\ (40, 60) = 40$

2. نبحث عن أقل تكلفة ضمن القيم المتبقية في الجدول، فنجد أنها تساوي (11) وهي تقع في الخلية (S_3, D_3)، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر (S_3) مع ما يحتاجه مركز الطلب (D_3) ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_3, D_3).

$X_{33} = \text{Min}\ (40, 30) = 30$

3. التكلفة الأقل الأخرى ضمن الجدول تساوي (12) وهي تقع في الخلية (S_1, D_2) إلا أن المصدر (S_1) قد نفذت الكميات المتوفرة لديه بالكامل لذا ننتقل إلى التكلفة

الأقل التالية ضمن الجدول وتساوي (14) وهي تقع في الخلية (S_3, D_1). لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر (S_3) مع ما يحتاجه مركز الطلب (D_1) ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_3, D1).

$$X_{31} = \text{Min}\ (10, 20) = 10$$

4. التكلفة الأقل الأخرى ضمن الجدول تساوي (16) وهي تقع في الخلية (S_2, D_3)، إلا أن الكمية التي يحتاجها (D_3) قد تم تخصيصها بالكامل لذا يتم الانتقال إلى التكلفة الأقل التي تليها وتساوي (18) وهي تقع في الخلية (S_2, D_1)، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر (S_2) مع ما يحتاجه مركز الطلب (D_1) ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_2, D_1).

إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع الكميات المتوفر لدى مراكز الإنتاج على مراكز الاستلام. عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول الحل الأولي الأساسي لمشكلة النقل بصيغته النهائية كما يلي:

الشكل (6- 5) التوزيع حسب طريقة التكلفة الأقل

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10]	[12]	[20]	40
S2	10 [18]	30 [24]	[16]	40
S3	10 [14]	[22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأولي هي:

$$X_{11} = 40, X_{21} = 10, X_{22} = 30, X_{31} = 10, X_{33} = 30$$

عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا الممتلئة)=

$$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

واستناداً إلى ما تقدم فإن التكلفة الأولية لعمليات النقل هي:

$$Cost = 40\,(10) + 10\,(18) + 30\,(24) + 10\,(14) + 30\,(11) = 1770$$

وعند مقارنة هذه التكلفة مع ما تم التوصل إليه في طريقة الركن الشمالي الغربي، نجد بأن هناك فرق مقداره (20) دينار (1790 – 1770 = 20) والسبب في ذلك يرجع إلى أن طريقة الركن الشمالي الغربي أهملت عنصر التكلفة في عمليات النقل من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستلام.

3. طريقة فوجل التقريبية (الكلفة الفرضية) (VAM)

تعد هذه الطريقة من أفضل طرق الحصول على الحل الأولي لمشكلة النقل، لأنها تعطي حلاً اقرب إلى الحل الأمثل.

وتتمثل آلية عمل هذه الطريقة بما يلي:

أ. حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود، ويطلق عليه (الجزاء Penalty).

ب. نختار أكبر فرق (جزاء) ناتج من بين الصفوف والأعمدة، وفي حالة تساوي أكثر من قيمة واحدة نختار واحدة عشوائياً لا على التعيين.

ج. نحدد الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة في الصف أو العمود الذي تم اختياره في الخطوة الثانية. ثم يتم مقارنة ما هو متوفر لدى مركز الإنتاج مع ما يحتاجه مركز الاستلام. ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية المختارة، وبعد ذلك يحذف الصف أو العمود المقابل لأصغر الكميتين.

د. إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع الكميات المتوفرة في مراكز الإنتاج على مراكز الاستلام.

ولتوضيح خطوات طريقة فوجل التقريبية سيتم الاعتماد على مثال الشركة العربية لصناعة الثلاجات.

في البداية يتم حساب الفرق (الجزاء) بين أقل تكلفتين استناداً إلى البيانات الواردة في جدول نقل الشركة العربية لصناعة الثلاجات.

أ. حساب الفرق (الجزاء) بين أقل تكلفتين في كل صف:

- أقل تكلفتين في الصف الأول هما (10, 12) والفرق بينهما هو (2).
- أقل تكلفتين في الصف الثاني هما (16, 18) والفرق بينهما هو (2).
- أقل تكلفتين في الصف الثالث هما (11, 14) والفرق بينهما هو (3).

ومن ثم يتم احتساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل عمود:

- أقل تكلفتين في العمود الأول هما (10, 14) والفرق بينهما هو (4).
- أقل تكلفتين في العمود الثاني هما (12, 22) والفرق بينهما هو (10).
- أقل تكلفتين في العمود الثالث هما (11, 16) والفرق بينهما هو (5).

إن أكبر فرق (جزاء) في الجدول هو (10) ويعود إلى العمود الثاني. نحدد أصغر تكلفة في العمود الثاني وهي ($C_{12} = 12$) وتقع في الخلية (S_1, D_2)، لذلك نقارن ما هو متوفر لدى مركز الإنتاج (S_1) مع ما يحتاجه مركز الاستلام (D_2)، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_1, D_2) ويحذف العمود الثاني.

$$\mathbf{X_{12} = Min\ (40, 30) = 30}$$

الخطوة التالية هو حساب الفرق (الجزاء) الجديد للجدول ومن بينها يتم اختيار أكبر فرق (باستثناء العمود المحذوف).

ب. الفرق (الجزاء) بين أقل تكلفتين في كل صف:

- أقل تكلفتين في الصف الأول هما (10, 20) والفرق بينهما هو (10).
- أقل تكلفتين في الصف الثاني هما (16, 18) والفرق بينهما هو (2).

- أقل تكلفتين في الصف الثالث هما (11, 14) والفرق بينهما هو (3).

ومن ثم يتم احتساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل عمود:

- أقل تكلفتين في العمود الأول هما (10, 14) والفرق بينهما هو (4).
- أقل تكلفتين في العمود الثالث هما (11, 16) والفرق بينهما هو (5).

إن أكبر فرق (جزاء) في الجدول هو (10) ويعود إلى الصف الأول. إن أصغر تكلفة في الصف الأول هي ($C_{11} = 10$) وهي تقع في الخلية (S_1, D_1)، لذا نقارن ما هو متوفر لدى مركز الإنتاج (S_1) مع ما يحتاجه مركز الاستلام (D_1)، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_1, D_1) ويحذف الصف الأول.

$$\mathbf{X_{11} = Min\ (10, 60) = 10}$$

بعد ذلك يتم حساب الفرق (الجزاء) الجديد للجدول ومن بينها يتم اختيار أكبر فرق (جزاء) بعد حذف العمود الثاني والصف الأول.

أ. حساب الفرق (الجزاء) بين أقل تكلفتين في كل صف:

- أقل تكلفتين في الصف الثاني هما (16, 18) والفرق بينهما هو (2).
- أقل تكلفتين في الصف الثالث هما (11, 14) والفرق بينهما هو (3).

ومن ثم يتم احتساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل عمود:

- أقل تكلفتين في العمود الأول هما (18, 10) والفرق بينهما هو (4).
- أقل تكلفتين في العمود الثالث هما (11, 16) والفرق بينهما هو (5).

إن أكبر فرق (جزاء) في الجدول هو (5) ويعود إلى العمود الثالث. إن أصغر تكلفة في العمود الثالث هي ($C_{33} = 11$) وتقع في الخلية (S_3, D_3) لذا نقارن ما هو متوفر في مركز الإنتاج (S_3) مع ما يحتاجه مركز الطلب (D_3)، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_3, D_3). ويحذف العمود الثالث.

$$\mathbf{X_{33} = Min\ (30, 30) = 30}$$

عندما يبقى مركز طلب واحد لم يستوفِ احتياجاته، تؤول إلية جميع الكميات المعروضة المتبقية دون الحاجة إلى إعادة حساب الفروق. ونلاحظ من المثال بأنه لم يبقى سوى مركز الطلب الأول لم يستوفِ احتياجاته لذا تؤول إلي جميع الكميات المعروضة المتبقية (40) وحدة من مركز الإنتاج الثاني، و(10) وحدات من مركز الإنتاج الثالث.

والشكل التالي يبين خطوات النقل بطريقة فوجل التقريبية

الشكل (6- 6) آلية التوزيع حسب طريقة فوجل التقريبية

إلى / من	D1	D2	D3	العرض		
S1	10 [10]	30 [12]	[20]	40	2	**10** يحذف
S2	40 [18]	[24]	[16]	40	2 2	2
S3	10 [14]	[22]	30 [11]	40	3 3	3
الطلب	60	30	30	120		
	4	**10**	5			
	4	يحذف	**5**			
			يحذف			

إن الحل الأساسي هو:

$$X_{11} = 10, X_{12} = 30, X_{21} = 40, X_{31} = 10, X_{33} = 30$$

عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا الممتلئة) =

$$M = N - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

واستناداً إلى ما تقدم فإن التكلفة الأولية لعمليات النقل حسب طريقة فوجل التقريبية هي:

$$Cost = 10\ (10) + 30\ (12) + 40\ (18) + 10\ (14) + 30\ (11)$$

$$= 1650$$ دينار

وعند مقارنة هذه التكلفة مع ما تم التوصل إليه في طريقة التكلفة الأقل نجد بأن هناك فرق مقداره (120) (120 = 1650 − 1770).

4.6 طرق تحسين الحل الأولي وصولاً إلى الحل الأمثل

يمكن الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق إجراء تحسين على الحل الأساسي بعدة طرق أهمها:

أ. طريقة المسار المغلق (حجر النقل) Stepping Stone Method.

ب. طريقة التوزيع المعدلة (عوامل الضرب) Modified Distribution Method

إن الحل باستخدام أي من هاتين الطريقتين يؤدي إلى النتيجة نفسها. وهي الحل الأمثل.

أولاً: طريقة المسار المغلق (حجر النقل) Stepping – Stone Method

ويطلق عيها أحياناً طريقة المسار المتعرج وتقوم هذه الطريقة على أساس تقييم جميع الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) لمعرفة مدى مساهمتها في تخفيض تكاليف النقل الكلية في حالة تحويلها إلى خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية). ومن أجل اختيار المتغير الداخل يتم اختبار الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) في جدول الحل الأولي للنقل الذي تم الحصول عليه باستخدام إحدى طرق المرحلة الأولى من الحل السابقة.

تتم عملية الاختبار عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي) ويجري تكوين المسار المغلق برسم خطوط مستقيمة (عمودية وأفقية) تكون نهايتها خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية) ما عدا نقطة البداية والنهاية للمسار المغلق فتكون للخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي) المطلوب اختبارها. إن هذا يعني أن المسار المغلق يجب أن يمر فقط بالخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)، ويتم الاستفادة من

المسار المغلق في معرفة مدى إمكانية تخفيض قيمة دالة الهدف. بزيادة قيمة الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي) التي رسم لها المسار بمقدار وحدة واحدة بعد أن كانت قيمته صفراً.

ولتسهيل طريقة الحل تعطى إشارة موجب (+) وإشارة سالب (-) بالتعاقب للخلايا التي يمر فيها المسار المعلق إبتداءاً من الخلية الفارغة المرسوم لها المسار المغلق ولغاية آخر خلية في المسار. أما الخلايا الممتلئة التي لا يمر فيها المسار فإن قيمتها تبقى كما هي بدون تغيير. وبعد هذا الإجراء يتم حساب مدى التغير الحاصل في قيمة دالة الهدف على ضوء التغير الجديد الذي حصل في قيم المتغيرات (الخلايا).

إن تحديد الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي) التي ستدخل الحل يتم على أساس مدى إمكانيتها في تحقيق أكبر انخفاض في تكلفة النقل الكلية (دالة الهدف). أما بالنسبة للخلية التي ستغادر الحل فإنها تمثل أصغر خلية ممتلئة في المسار المغلق تم تنقيصها وحدة واحدة. وإذا ما تساوت أكثر من خلية ممتلئة في القيمة فإنه يتم اختيار أحدهما لا على التعيين. أما الخطوة الأخرى من الحل فهي إضافة قيمة المتغير الخارج من الحل إلى الخلايا التي تحمل إشارة موجبة (+)، وطرح قيمته من الخلايا التي تحمل إشارة سالبة، أما الخلايا الممتلئة الأخرى التي لم يمر فيها المسار المغلق فتبقى كما هي بدون تغيير. وهكذا نكرر نفس الإجراءات السابقة لحين الوصول إلى أقل قيمة لدالة الهدف (الحل الأمثل).

ولتوضيح هذه الطريقة افترض أنه يراد تحسين الحل الأولي الأساسي الممكن الذي تم الوصول إليه بطريقة التكلفة الأقل بطريقة المسار المغلق.

إن الحل الأولي الأساسي الذي تم التوصل إليه في مثال الشركة العربية لصناعة الثلاجات كان كما هو مبين في الشكل التالي:

الشكل (6- 7) الحل الأولي لمشكلة نقل الشركة العربية لصناعة الثلاجات

(طريقة التكلفة الأقل)

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10]	[12]	[20]	40
S2	10 [18]	30 [24]	[16]	40
S3	10 [14]	[22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

جدول الحل الأولي الأساسي بطريقة التكلفة الأقل

في البداية يجب التأكد من أن عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج – عدد مراكز الاستلام – 1 أي: 3 + 3 – 1 = 5.

إن الخلايا الفارغة في الجدول هي:

S_1D_2 (X_{12}) , S_1D_3 (X_{13}) , S_2D_3 (X_{23}), S_3D_2 (X_{32})

يتم أولاً اختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي) ونحسب التكلفة غير المباشرة (مؤشر التحسين Improvement Index) عند كل خلية فارغة.

المسار المغلق للخلية S_1D_2 (X_{12})

$S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2$

نجد مؤشر التحسين:

$+ 12 - 24 + 18 - 10 = - 4$

الشكل (6- 8) المسار المغلق للخلية S_1D_2

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10] −	[12] +	[20]	40
S2	10 [18] +	30 [24] −	[16]	40
S3	10 [14]	[22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

المسار المغلق للخلية S_1D_3

$$+ S_1D_3 - S_3D_3 + S_3D_1 - S_1D_1$$

نجد مؤشر التحسين:

$$+ 20 - 11 + 14 - 10 = + 13$$

الشكل (6- 9) المسار المغلق للخلية S_1D_3

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10] −	[12]	[20] +	40
S2	10 [18]	30 [24]	[16]	40
S3	10 [14] +	[22]	30 [11] −	40
الطلب	60	30	30	120

المسار المغلق للخلية الفارغة S_2D_3

$+ S_2D_3 - S_3D_3 + S_3D_1 - S_2D_1$

نجد مؤشر التحسين:

$+ 16 - 11 + 14 - 18 = + 1$

الشكل (6- 10) المسار المغلق للخلية S_2D_3

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10]	[12]	[20]	40
S2	10 [18] -	30 [24]	[16] +	40
S3	10 [14] +	[22]	30 [11] -	40
الطلب	60	30	30	120

المسار المغلق للخلية الفارغة S_3D_2

$+ S_3D_2 - S_3D_1 + S_2D_1 - S_2D_2$

نجد مؤشر التحسين:

$+ 22 - 14 + 18 - 24 = + 2$

الشكل (6- 11) المسار المغلق للخلية S_3D_2

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10]	[12]	[20]	40
S2	10 [18] +	30 [24] -	[16]	40
S3	10 [14] -	[22] +	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

وفيما يلي ملخص قيم مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة:

$S_1D_2\ (X_{12}) = +\ 12 - 24 + 18 - 10 = -\ 4$

$S_1D_3\ (X_{13}) = +\ 20 - 11 + 14 - 10 = +\ 13$

$S_2D_3\ (X_{23}) = +\ 16 - 11 + 14 - 18 = +\ 1$

$S_3D_2\ (X_{32}) = +\ 22 - 14 + 18 - 24 = +\ 2$

يتم الوصول إلى الحل الأمثل عندما تكون جميع قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) أكبر من أو تساوي صفر (موجبة). وفي حالة وجود خلية مؤشر التحسين لها يساوي صفر فإن هذا يعني تعدد الحلول المثلى.

تبين النتائج السابقة بأن الحل ليس أمثل، ويحتاج إلى إجراء تعديل، بحيث يتم تحديد الخلية الفارغة التي ستدخل الحل، وهي الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة، لذلك فإن الخلية الفارغة (S_1D_2) سوف تدخل إلى الحل لأنها تحمل أعلى مؤشر تحسين (بإشارة سالبة). وفي حال تعدد مؤشرات التحسين السالبة نختار الأعلى منها بإشارة سالبة، وفي حال تساوي أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة لخليتين فارغتين نختار إحداها عشوائياً لا على التعين. إن الخلية التي ستدخل الحل ستساهم بتخفيض تكلفة نقل الوحدة الواحدة بمقدار قيمة مؤشر التحسين.

وبما أن الخلية (S_1D_2) سوف تدخل إلى الحل، نقوم بإجراءات عملية النقل عن طريق المسار المغلق للخلية التي ستدخل الحل وهي (S_1D_2) إن المسار المغلق لهذه الخلية هو كالآتي:

$S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_1D_1$

المسار المغلق للخلية S_1D_2	- 40	+10	- 30	+
قيم الخلايا الممتلئة بعد إجراء عملية النقل	10	40	0	30

نحدد الخلية التي ستغادر الحل الأساسي، وهي الخلية الممتلئة ذات أقل كمية منقولة ضمن المسار المغلق وتحمل إشارة سالبة، وهي الخلية (S_2D_2)، بعدها يتم تعديل الحل بإضافة قيمة الخلية التي ستغادر الحل الأساسي إلى الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية) التي تحمل إشارة موجبة (+) وتطرح من الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية) التي تحمل إشارة سالبة (-) ضمن نفس المسار المغلق، في حين تبقى قيم الخلايا الممتلئة الأخرى كما هي دون تغيير.

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق كالآتي:

الشكل (6- 12) التعديل الأول (الحل الأمثل) لمشكلة نقل الشركة العربية لصناعة الثلاجات

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	10 10	12 30	20	40
S2	18 40	24	16	40
S3	14 10	22	11 30	40
الطلب	60	30	30	120

يتم اختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق إعادة رسم المسار المغلق وإيجاد قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) وذلك على النحو التالي:

$S_1D_3\ (X_{13}) = S_1D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_3$

$S_2D_2\ (X_{22}) = S_2D_2 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_2D_2$

$S_2D_3\ (X_{23}) = S_2D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_2D_1 \rightarrow S_2D_3$

$S_3D_2\ (X_{32}) = S_3D_2 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_3D_2$

وفيما يلي قيم مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة (متغير غير أساسي)

$S_1D_3 = +20 - 11 + 14 - 10 = +13$

$S_2D_2 = +24 - 18 + 10 - 12 = +4$

$S_2D_3 = +16 - 11 + 14 - 18 = +1$

$S_3D_2 = +22 - 14 + 10 - 12 = +6$

وبما أن جميع قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة موجبة، فإن هذا يعني أن الحل أمثل.

وتكون التكلفة الكلية عند الحل الأمثل:

$$Z = (10)(10) + (30)(12) + (40)(18) + (10)(14) + (30)(11) = 1650$$

وهذا يعني أنه تم تخفيض التكلفة من (1770) دينار عند الحل الأولي إلى (1650) دينار عند الحل الأمثل أي بفرق مقداره (120) دينار. وذلك لأن دخول الخلية (S1,D2)الى الحل ساهم بتخفيض التكلفة بمقدار 4دنانير لكل وحدة وبالتالي فإن نقل 30 وحدة سيخفض التكلفة بمقدار 120(4×30). لاحظ أنه تم التوصل إلى نفس النتيجة التي توصلنا إليها عند استخدام طريقة فوجل التقريبية

ثانياً: طريقة التوزيع المعدلة

Modified Distribution Method (MODI)

بينا سابقاً كيف تستخدم طريقة المسار المغلق في اختبار أمثلية الحل الأولى، وتعد طريقة التوزيع المعدلة، طريقة أخرى بديلة لاختبار أمثلية الحل ويطلق عليها أحياناً طريقة المضاعفات أو طريقة عوامل الضرب، وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1. لكل صف (I) في جدول النقل يتم وضع مقابل له هو (U_i)، ولكل عمود في جدول النقل يوضع مقابل له وهو (V_j).

2. يتم تجزئة الخلايا الواردة في جدول النقل عند الحل الأولي الأساسي إلى خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية) وخلايا فارغة (متغيرات غير أساسية).

3. لجميع الخلايا الممتلئة يتم وضع العلاقة الرياضية التالية:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

4. يتم حساب التغير في الكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي) وذلك وفق العلاقة التالية:

$$b_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

5. يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم (b_{ij}) أكبر من أو تساوي صفر (موجبة)، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من قيم (b_{ij}) أقل من صفر (سالبة) نختار الخلية التي قيمة (b_{ij}) لها أعلى قيمة (بإشارة سالبة) ونرسم لها المسار المغلق ونجري عملية النقل حسب ما مر سابقاً في طريقة المسار المغلق، الفرق هنا يكمن في أن رسم المسار المغلق يكون فقط للخلية التي سوف تدخل إلى الحل وليس لجميع الخلايا الفارغة.

ولتوضيح خطوات هذه الطريقة، يتم تطبيقها على جدول الحل الأولي الأساسي بطريقة التكلفة الأقل لمشكلة النقل الخاصة بالشركة العربية لصناعة الثلاجات.

أ. لكل صف (I) في جدول الحل الأول الأساسي للنقل يتم وضع مقابل له (U_i) ولكل عمود يوضع مقابل له (V_j) لذلك فإن شكل جدول النقل يصبح على النحو التالي:

الشكل (6- 13) المتغيرات (U_i) و (V_j)

إلى / من	D1 V1=10	D2 V2= 16	D3 V3= 7	العرض
S1 U1= 0	40 [10]	[12]	[20]	40
S2 U2= 8	10 [18]	30 [24]	[16]	40
S3 U3= 4	10 [14]	[22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

ب. يتم تجزئة الخلايا في الجدول السابق إلى خلايا فارغة وخلايا ممتلئة.

ج. لجميع الخلايا الممتلئة يتم تطبيق العلاقة الرياضية التالية:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

لذلك سوف يتم الحصول على العلاقات الرياضية التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U1 + V1 = 10$ .... (1)

$S_2D_1\ (X_{21}) \rightarrow U2 + V1 = 18$ .... (2)

$S_2D_2\ (X_{22}) \rightarrow U2 + V2 = 24$ .... (3)

$S_3D_1\ (X_{31}) \rightarrow U3 + V1 = 14$ .... (4)

$S_3D_3\ (X_{33}) \rightarrow U3 + V3 = 11$ .... (5)

من العلاقات الرياضية السابقة يتضح أن لدينا (6) مجاهيل. لذلك لا يمكن حل هذه المعادلات بالطريقة الطبيعية، وذلك لأن عدد المعادلات لا يساوي عدد المجاهيل، ولحل هذه المشكلة نفترض بأن قيمة (u1) تساوي صفر وعليه فإن:

$$U_1 + V_1 = 10 \rightarrow 0 + V_1 = 10 \quad \rightarrow \quad V_1 = 10$$

$$U_2 + V_1 = 18 \rightarrow U_2 + 10 = 18 \quad \rightarrow \quad U_2 = 8$$

$U_2 + V_2 = 24 \rightarrow 8 + V_2 = 24 \quad \rightarrow \quad V_2 = 16$

$U_3 + V_1 = 14 \rightarrow U_3 + 10 = 14 \quad \rightarrow \quad U_3 = 4$

$U_3 + V_3 = 11 \rightarrow 4 + V_3 = 11 \quad \rightarrow \quad V_3 = 7$

د. يتم حساب التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة وذلك وفق العلاقة:

$b_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

لذلك سوف يتم الحصول على ما يلي:

الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)

$S_1D_2\ (X_{12})\ b_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 12 - 0 - 16 = -4$

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 20 - 0 - 7 = 13$

$S_2D_3\ (X_{23})\ b_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 16 - 8 - 7 = 1$

$S_3D_2\ (X_{32})\ b_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 22 - 4 - 16 = 2$

مما تقدم يتضح أن التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) كان سالباً بالنسبة للخلية الفارغة (S_1D_2)، لذلك تعتبر هذه الخلية من أكثر الخلايا الفارغة مساهمتاً في عملية تخفيض التكلفة، لذلك فهي المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

الشكل (6- 14) المسار المغلق للخلية التي ستغادر الحل

من \ إلى	D1	D2	D3	العرض
S1	40 [10] (-)	[12] (+)	[20]	40
S2	10 [18] (+)	30 [24] (-)	[16]	40
S3	10 [14]	[22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

ويتم تنفيذ هذا التعديل على محتويات الجدول السابق وعندها نحصل على القيم الجديدة المطلوبة للكميات كما هو مبين في الجدول الآتي:

الشكل (6- 15) التعديل الأول بعد إجراء عملية النقل (الحل أمثل)

إلى / من	D1	D2	D3	العرض
S1	10 [10]	30 [12]	[20]	40
S2	40 [18]	[24]	[16]	40
S3	10 [14]	[22]	30 [11]	40
الطلب	60	30	30	120

ومن أجل التحقق من أن هذا الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، يتم إعادة الحل مرة أخرى من الخطوة الأولى بإيجاد قيم كل من (U_i) و (V_j) بافتراض أن قيمة (U_1) تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد التغير في التكلفة لكل خلية فارغة وعلى النحو التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U_1 + V_1 = 10 \rightarrow 0 + V_1 = 10 \qquad V_1 = 10$

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U_1 + V_2 = 12 \rightarrow 0 + V_2 = 12 \qquad V_2 = 12$

$S_2D_1\ (X_{21}) \rightarrow U_2 + V_1 = 18 \rightarrow U_2 + 10 = 18 \qquad U_2 = 8$

$S_3D_2\ (X_{31}) \rightarrow U_3 + V_1 = 14 \rightarrow U_3 + 10 = 14 \qquad U_3 = 4$

$S_3D_3\ (X_{33}) \rightarrow U_3 + V_3 = 11 \rightarrow 4 + V_3 = 11 \qquad V_3 = 7$

بناء على ذلك يتم حساب التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة

الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي)

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 20 - 0 - 7 = 13$

$S_2D_2\ (X_{22})\ b_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 24 - 8 - 12 = 4$

$S_2D_3\ (X_{23})\ b_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 16 - 8 - 7 = 1$

$S_3D_2\ (X_{32})\ b_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 22 - 4 - 12 = 6$

مما تقدم يتضح أن كل قيم التغير في التكلفة (b_{ij}) للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هي قيم موجبة لذلك فإن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن قيمة التكلفة الكلية (Z) عند الحل الأمثل هي:

$$Z = (10)\ (10) + (30)\ (12) + (40)\ (18) + (10)\ (14) + (30)\ (11)$$
$$= 1650$$

وهي تمثل قيمة دالة الهدف وهي أقل تكلفة كلية ممكنة لنقل البضائع من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستلام (الطلب).

لاحظ أن هذه النتيجة التي تعبر عن الحل الأمثل وفق طريقة التوزيع المعدلة هي نفسها التي تم التوصل إليها عند تطبيق طريقة المسار المغلق.

5.6 الحالات الخاصة في النقل Special Cases in Transportation

قد تواجهنا في أثناء حل مشكلات النقل المختلفة بعض الحالات التي تتطلب معالجة خاصة بهدف التمكن من صياغة المشكلة وفقاً لمتطلبات النموذج الرياضي لهذه المشكلات. وفيما يلي الحالات الخاصة في النقل:

1.5.6 حالة عدم التوازن Unbalanced Model

وتسمى أيضاً مشاكل النقل المفتوح، وهي الحالة التي لا يتساوى فيها العرض مع الطلب، أي أن:

$$\sum_{j=1}^{n} Supply \neq \sum_{i=1}^{m} Demand$$

وهذا يعني أن العرض أكبر من الطلب أو أن الطلب أقل من العرض:

$$\sum_{j=1}^{n} Supply > \sum_{i=1}^{m} Demand$$

ويتم معالجة هذه الحالة عن طريق إضافة مركز استلام (طلب) وهمي توضع فيه الكمية التي تمثل الفرق بين العرض والطلب، وتكون تكلفة النقل من مراكز الإنتاج إلى مراكز الطلب الوهمي تساوي صفر إن لم تذكر في مشكلة النقل. وتتم عملية الحل بنفس الطرق المشار إليها سابقاً.

أو أن العرض أقل من الطلب أو أن الطلب أكبر من العرض:

$$\sum_{j=1}^{n} Supply < \sum_{i=1}^{m} Demand$$

ويتم معالجة هذه الحالة عن طريق إضافة مركز إنتاج وهمي توضع فيه الكمية التي تمثل الفرق بين العرض والطلب، وتكون تكلفة النقل من مركز الإنتاج الوهمي إلى مراكز الطلب تساوي صفر. إن لم تذكر في مشكلة النقل. ولتوضيح الحالة الأولى (العرض أكبر من الطلب) نأخذ المثال التالي:

مثال (6- 2): فيما يلي جدول النقل الخاص بالمصنع العربي للإلكترونيات.

الشكل (6- 16) بيانات مشكلة النقل الخاصة بالمصنع العربي للإلكترونيات

	D1	D2	D3	Supply
S1	4	8	12	400
S2	16	4	20	520
Demand	320	280	240	

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي **Northwest Corner**
2. إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة (المضاعف) **MODI**.

الحل

نلاحظ من جدول النقل بأن العرض (920) أكبر من الطلب (840) أي أن:

$$\sum_{j=1}^{2} a_i = 920 > \sum_{i=1}^{3} b_i = 840$$

لذلك نستكمل الجدول بإضافة مركز طلب وهمي رابع D4 الكمية المطلوبة له تساوي الفرق بين العرض والطلب أي: 920 – 840 = 80، ونعتبر أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل من S1، وS2 إلى مركز الطلب D4 تساوي صفر، وبذلك يكون العرض يساوي الطلب أي أن:

$$\sum_{j=1}^{2} a_i = \sum_{i=1}^{4} b_i$$

ويبين الجدول التالي توضيحاً لذلك.

الشكل (6- 17) جدول النقل بعد إضافة مركز الطلب الوهمي لموازنة الطلب والعرض.

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4	8	12	0	400
S2	16	4	20	0	520
Demand	320	280	240	80	

الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي يكون كما هو مبين في الجدول التالي:

الشكل (6- 18) الحل الأولي لمشكلة نقل المصنع العربي

(طريقة الركن الشمالي الغربي)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	320 [4]	80 [8]	[12]	[0]	400
S2	[16]	200 [4]	240 [20]	50 [0]	520
Demand	320	280	240	80	

والتكلفة عند الحل الأولي تساوي:

$(320)(4) + (80)(8) + (200)(4) + (240)(20) + (50)(0) = 7520$ دينار

الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق (حجر النقل):

في البداية يجب التأكد من أن عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج + عدد مراكز الاستلام − 1 = 2 + 4 − 1 = 5.

إن الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) في الجدول هي:

$S_1D_3\ (X_{13})\ ,\ S_1D_4\ (X_{14})\ ,\ S_2D_1\ (X_{21})$

يتم أولاً اختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي) ونحسب مؤشر التحسين (b_{ij}) عند كل خلية فارغة، وعلى النحو الأتي:

$b_{13} = +12 \quad -20 + 4 \quad -8 = \quad -12 \rightarrow$ تدخل الحل

$b_{14} = +0 \quad -8 + 4 \quad -0 = \quad -4$

$b_{21} = +16 \quad -4 + 8 \quad -4 = 16$

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل المناسب كالآتي:

الشكل (6- 19) جدول التعديل الأول بعد إجراء عملية النقل (الحل أمثل)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	320 [4]	[8]	80 [12]	[0]	400
S2	[16]	280 [4]	160 [20]	50 [0]	520
Demand	320	280	240	80	

نختبر أمثلية الحل مرة أخرى ونجد قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة وعلى النحو الأتي:

$b_{12} = +8 \quad -12 + 20 \quad -4 = 12$

$b_{14} = +0 \quad -12 + 20 \quad -0 = 8$

$b_{21} = +16 \quad -20 +12 \quad -4 = 4$

مما تقدم يتضح أن جميع قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هي قيم موجبة لذلك فإن الحل أمثل وأن قيمة التكلفة الكلية (Z) عند الحل الأمثل هي:

$$Z = (320)(4) + (80)(12) + (280)(4) + (160)(20) + (50)(0)$$

$= 6560$ دينار

ولتوضيح الحالة الثانية (العرض أقل من الطلب) نأخذ المثال التالي:

مثال (6- 3): افترض أن جدول النقل الخاص بالمصنع العربي للالكترونيات كان على النحو الأتي:

الشكل (6- 20) جدول نقل المصنع العربي للالكترونيات

	D1	D2	D3	Supply
S1	4	8	12	**400**
S2	16	4	20	**520**
Demand	**320**	**360**	**400**	

المطلوب:

3. **إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي Northwest Corner**

4. **إيجاد الحل الأمثل بطريقة المسار المغلق (حجر النقل).**

الحل

نلاحظ من جدول النقل بأن العرض (920) أقل من الطلب (1080) أي أن:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 920 < \sum_{j=1}^{3} b_j = 1080$$

لذلك نستكمل الجدول بإضافة مركز إنتاج وهمي ثالث S3 الكمية المعروضة فيه تساوي الفرق بين العرض والطلب أي: 1080 – 920 = 160 ، ونعتبر أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من S3 إلى مركز الطلب Di تساوي صفر، وبذلك يكون العرض يساوي الطلب أي أن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} b_i$$

ويبين الجدول التالي توضيحاً لذلك.

الشكل (6- 21) جدول النقل بعد إضافة مركز الإنتاج الوهمي لموازنة الطلب والعرض.

	D1	D2	D3	Supply
S1	4	8	12	400
S2	16	4	20	520
S3	0	0	0	160
Demand	320	360	400	1080

الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي يكون كما هو مبين في الشكل التالي:

الشكل (6- 22) حدول الحل الأولي لمشكلة النقل الخاصة بالمصنع العربي للالكترونيات

	D1	D2	D3	Supply
S1	320 [4]	80 [8]	[12]	400
S2	[16]	280 [4]	240 [20]	520
S3	[0]	[0]	160 [0]	160
Demand	320	360	400	1080

والتكلفة عن الحل الأولي تساوي:

$(320)(4) + (80)(8) + (280)(4) + (240)(20) + (160)(0) = 7840$ دينار

الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق (حجر النقل):

في البداية يجب التأكد من أن عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج + عدد مراكز الاستلام – 1 = 3 + 3 – 1 = 5.

إن الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) في الجدول هي:

$S_1D_3\ (X_{13})$, $S_2D_1\ (X_{21})$, $S_3D_1\ (X_{31})$, $S_3D_2\ (X_{32})$

يتم أولاً اختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي) ونحسب مؤشر التحسين (b_{ij}) عند كل خلية فارغة، وعلى النحو الأتي:

$b_{13} = +12 \quad - 20 + 4 \quad - 8 = \quad -12 \rightarrow$ تدخل الحل

$b_{21} = + 16 \quad - 4 + 8 \quad - 4 = 16$

$b_{31} = + 0 \quad - 4 + 8 \quad - 4 + 20 \quad - 0 = 20$

$b_{32} = + 0 \quad - 4 + 20 \quad - 0 = 16$

ويكون جدول النقل بعد إجراء التعديل المناسب كالآتي:

الشكل (6- 23) جدول النقل بعد إجراء التعديل الأول (الحل أمثل)

	D1	D2	D3	Supply
S1	320 [4]	[8]	80 [12]	400
S2	[16]	360 [4]	160 [20]	520
S3	[0]	[0]	160 [0]	160
Demand	320	360	400	1080

نختبر أمثلية الحل مرة أخرى ونجد قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة وعلى النحو الأتي:

$b_{12} = +8 \quad -12 +20 \quad -4 = 12$

$b_{21} = +16 \quad -20 +12 \quad -4 = 4$

$b_{31} = +0 \quad -4 +12 \quad -0 = 8$

$b_{21} = +0 \quad -4 +20 \quad -0 = 16$

مما تقدم يتضح أن جميع قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هي قيم موجبة لذلك فإن الحل أمثل وأن قيمة التكلفة الكلية (Z) عند الحل الأمثل هي:

$$Z = (320)(4) + (80)(12) + (360)(4) + (160)(20) + (160)(0)$$
$$= 6880 \text{ دينار}$$

2.5.6 حالة الانحلال Degeneracy

تحدث هذه الحالة عندما يكون عدد الخلايا الممتلئة في جدول يمثل أحد الحلول الممكنة لمشكلة النقل غير محقق للشرط التالي:

عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج (المصادر) + عدد مراكز الاستلام – 1

ويمكن أن تحدث هذه الحالة في الحل الأولي أو أي حل محسّن بعد الحل الأولي. حيث ينتج عن عدم تحقق الشرط المذكور عدم إمكانية إيجاد المسار المغلق للخلايا الفارغة، ولن نتمكن من حساب قيم u_i وv_j، ولا نستطيع بالتالي حساب b_{ij} للخلايا الفارغة، ويتم معالجة هذه المشكلة هن طريق افتراض إحدى الخلايا الفارغة خلية ممتلئة قيمة X_{ij} فيها تساوي صفر، ويفضل أن يتم اختيار الخلية الفارغة ذات أقل تكلفة نقل شريطة أن تسمح لنا هذه الخلية بحساب قيم u_i وv_j، وبالتالي حساب b_{ij} للخلايا الفارغة، وإلا فإننا ننتقل إلى الخلية التي تليها من حيث صغر التكلفة.

مثال (6- 4): الشكل التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة (بالدينار) من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بشركة الأردن لصناعة الإسفنج.

الشكل (6- 24) جدول نقل شركة الأردن لصناعة الإسفنج

	D1	D2	D3	Supply
S1	10	8	4	140
S2	12	6	4	100
S3	2	10	2	20
Demand	100	100	60	260

المطلوب:

1. إيجاد التكلفة عند الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.
2. إيجاد التكلفة عند الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المغلق (حجر النقل).

الحل

1. الجدول التالي يبين التوزيع الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

الشكل (6- 25) التوزيع الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

	D1	D2	D3	Supply
S1	100 [10]	40 [8]	[4]	140
S2	[12]	60 [6]	40 [4]	100
S3	[2]	[10]	20 [2]	20
Demand	100	100	60	260

التكلفة عند الحل الأولي =

$(2)(20) + (4)(40) + (6)(60) + (8)(40) + (10)(100)$

= 1880 دينار

2. الحل الأمثل

في البداية يجب التأكد من أن عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج – عدد مراكز الاستلام – 1 = 3 + 3 – 1 = 5.

إن الخلايا الفارغة في الجدول هي:

$S_1D_3\ (X_{13})\ ,\ S_2D_1\ (X_{21})\ ,\ S_3D_1\ (X_{31}),\ S_3D_2\ (X_{32})$

يتم أولاً اختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي) ونحسب مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة.

المسار المغلق للخلية $S_1D_3\ (X_{13})$ هو:

$S_1D_3 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_1D_3$

ومؤشر التحسين يساوي:

$+ 4 - 8 + 6 - 4 = - 2$

المسار المغلق للخلية $S_2D_1\ (X_{21})$ هو:

$S_2D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_1$

ومؤشر التحسين يساوي:

$+ 12 - 10 + 8 - 6 = 4$

المسار المغلق للخلية $S_3D_1\ (X_{31})$ هو:

$S_3D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_3D_3 \rightarrow S_3D_1$

ومؤشر التحسين يساوي:

$+ 2 - 10 + 8 - 6 + 4 - 2 = - 4$

المسار المغلق للخلية S_3D_2 (X_{32}) هو:

$$S_3D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_3D_2 \rightarrow S_3D_2$$

ومؤشر التحسين يساوي:

$$+10 - 6 + 4 - 2 = 6$$

تبين النتائج السابقة بأن الحل ليس أمثل، ويحتاج إلى إجراء تعديل، بحيث يتم تحديد الخلية الفارغة التي ستدخل الحل، وهي الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة، لذلك فإن الخلية الفارغة (S_3D_1) سوف تدخل إلى الحل لأنها تحمل أعلى مؤشر تحسين (بإشارة سالبة). وبما أن الخلية (S_3D_1) سوف تدخل إلى الحل، نقوم بإجراءات عملية النقل عن طريق المسار المغلق للخلية التي ستدخل الحل وهي (S_3D_1) حيث أن المسار المغلق لهذه الخلية هو كالآتي:

$$\mathbf{S_3D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_3D_3}$$

المسار المغلق للخلية S_3D_1	- 20	+40	- 60	+40	- 100	+
قيم الخلايا الممتلئة بعد النقل	0	60	40	60	80	20

نحدد الخلية التي ستغادر الحل الأساسي، وهي الخلية الممتلئة ذات أقل كمية منقولة ضمن المسار المغلق تحمل إشارة سالبة، وهي الخلية (S_3D_3)، بعدها يتم تعديل الحل بإضافة قيمة الخلية التي ستغادر الحل الأساسي إلى الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية) التي تحمل إشارة موجبة (+) وتطرح من الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية) التي تحمل إشارة سالبة (-) ضمن نفس المسار المغلق، في حين تبقى قيم الخلايا الممتلئة الأخرى كما هي دون تغيير.

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق كالآتي:

الشكل (6- 26) جدول النقل بعد إجراء التعديل الأول

	D1	D2	D3	Supply
S1	80 [10]	60 [8]	[4]	140
S2	[12]	40 [6]	60 [4]	100
S3	20 [2]	[10]	[2]	20
Demand	100	100	60	260

يتم اختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق إعادة رسم المسار المغلق وإيجاد قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) وذلك على النحو التالي:

$S_1D_3\ (X_{13}) = S_1D_3 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_3$

$S_2D_1\ (X_{21}) = S_2D_1 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_2D_1$

$S_3D_2\ (X_{32}) = S_3D_2 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2$

$S_3D_3\ (X_{33}) = S_3D_3 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_1D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_3D_3$

وفيما يلي قيم مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة (متغير غير أساسي)

$S_1D_3 = +4 - 4 + 6 - 8 = -2$

$S_2D_1 = +12 - 6 + 8 - 10 = +4$

$S_3D_2 = +10 - 8 + 10 - 2 = +10$

$S_3D_3 = +2 - 2 + 10 - 8 + 6 - 4 = +4$

تبين النتائج السابقة بأن الحل ليس أمثل، ويحتاج إلى إجراء تعديل، حيث يتم تحديد الخلية الفارغة التي ستدخل الحل، وهي الخلية الفارغة (S_1D_3)، ثم نقوم بإجراءات عملية النقل عن طريق المسار المغلق للخلية التي ستدخل الحل وهي (S_1D_3). على النحو الأتي:

$S_1D_3 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_1D_2$

+	- 60	+40	- 60	المسار المغلق للخلية S_3D_1
60		100		قيم الخلايا الممتلئة بعد النقل

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق كالآتي:

الشكل (6- 27) جدول النقل بعد إجراء التعديل الثاني (ظهور حالة الانحلال)

	D1		D2		D3		Supply
S1	80	10		8	60	4	140
S2		12	100	6		4	100
S3	20	2		10		2	20
Demand	100		100		60		260

يجب التأكد من أن عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج + عدد مراكز الاستلام − 1 = 3 + 3 − 1 = 5. لاحظ هنا بأن عدد الخلايا الممتلئة لا تحقق هذا الشرط، وهذا يعني أننا أمام حالة خاصة وهي الانحلال، ويتم معالجة هذه المشكلة هن طريق افتراض إحدى الخلايا الفارغة خلية ممتلئة قيمة X_{ij} فيها تساوي صفر، ويفضل أن يتم اختيار الخلية الفارغة ذات أقل تكلفة نقل، نفترض أن الخلية S_2D_3 خلية ممتلئة وقيمة X_{ij} فيها تساوي صفر كما هو مبين في الجدول الأتي:

الشكل (6- 28) معالجة حالة الإنحلال في النقل بافتراض إحدى الخلايا الفارغة خلية ممتلئة

	D1		D2		D3		Supply
S1	80	10		8	60	4	140
S2		12	100	6	0	4	100
S3	20	2		10		2	20
Demand	100		100		60		260

ويتم اختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق إعادة رسم المسار المغلق وإيجاد قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) وذلك على النحو التالي:

$S_1D_2\ (X_{13}) = S_1D_2 \rightarrow S_1D_3 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_1D_2$

$S_2D_1\ (X_{21}) = S_2D_1 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_1D_3 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_2D_1$

$S_3D_2\ (X_{32}) = S_3D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_1D_3 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_2$

$S_3D_3\ (X_{33}) = S_3D_3 \rightarrow S_1D_3 \rightarrow S_1D_1 \rightarrow S_3D_1 \rightarrow S_3D_3$

وفيما يلي قيم مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة (متغير غير أساسي)

$S_1D_2 = +8 - 4 + 4 - 6 = +2$

$S_2D_1 = +12 - 4 + 4 - 10 = +2$

$S_3D_2 = +10 - 6 + 4 - 4 + 10 - 2 = +12$

$S_3D_3 = +2 - 4 + 10 - 2 = +6$

مما تقدم يتضح أن جميع قيم مؤشر التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هي قيم موجبة لذلك فإن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن قيمة التكلفة الكلية (Z) عند الحل الأمثل هي:

$Z = (80)(10) + (60)(4) + (100)(6) + (0)(4) + (20)(2)$

$= 1680$ دينار

وهي تمثل قيمة دالة الهدف وهي أقل تكلفة كلية ممكنة لنقل البضائع من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستلام (الطلب).

3.5.6 حالة نماذج النقل المستخدمة لتعظيم الأرباح

Maximization Transportation Problems

غالباً ما يتم استخدام طريقة النقل لتخفيض تكاليف النقل، إلا أنها أيضاً يمكن أن تستخدم لتعظيم الأرباح، ويوجد طريقتين لمعالجة مثل هذه الحالات هما:

أ. الإبقاء على مشكلة النقل كما هي ومن ثم حلها باستخدام أساسيات النقل مع بعض التعديلات.

ولتوضيح هذه الطريقة نستخدم المثال التالي:

مثال (5- 5): الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، والربح المتحقق من نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بشركة الخير الصناعية.

الشكل (6- 29) جدول نقل شركة الخير الصناعية

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	4	6	200
S2	8	2	10	220
Demand	160	140	120	420

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي **Northwest Corner**
2. إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة (المضاعف) **MODI**.
3. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

الحل

1. يبين الجدول التالي الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

الشكل (6- 30) الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

	D1	D2	D3	Supply
S1	160 [2]	40 [4]	[6]	200
S2	[8]	100 [2]	120 [10]	220
Demand	160	140	120	420

الربح عند الحل الأولي = (160) (2) + (40)(40) + (2)(100) + (10)(120)

= 1880

2. الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة

أ. لكل صف (I) في جدول الحل الأول الأساسي للنقل يتم وضع مقابل له (U_i) ولكل عمود يوضع مقابل له (V_j) لذلك فإن شكل جدول النقل يصبح على النحو التالي:

الشكل (6- 31) المتغيرات (U_i)، و(V_j)

	D1 V_1	D2 V_2	D3 V_3	Supply
S1 U_1	160 [2]	40 [4]	[6]	200
S2 U_2	[8]	100 [2]	120 [10]	220
Demand	160	140	120	420

ج. يتم تجزئة الخلايا في الجدول السابق إلى خلايا فارغة وخلايا ممتلئة.

د. لجميع الخلايا الممتلئة يتم تطبيق العلاقة الرياضية التالية:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

لذلك سوف يتم الحصول على العلاقات الرياضية التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U1 + V1 = 2$ .... (1)

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U1 + V2 = 4$ .... (2)

$S_2D_2\ (X_{22}) \rightarrow U2 + V2 = 2$ .... (3)

$S_2D_3\ (X_{23}) \rightarrow U2 + V3 = 10$ .... (4)

من العلاقات الرياضية السابقة يتضح أن لدينا (5) مجاهيل. لذلك لا يمكن حل هذه المعادلات بالطريقة الطبيعية، وذلك لأن عدد المعادلات لا يساوي عدد المجاهيل، ولحل هذه المشكلة نفترض بأن قيمة (u1) تساوي صفر وعليه فإن:

$U1 + V1 = 2\ ,\ 0 + V1 = 2 \rightarrow V1 = 2$

$U1 + V2 = 4\ ,\ 0 + V2 = 4 \rightarrow V2 = 4$

$U2 + V2 = 2$, $U2 + 4 = 2 \rightarrow U2 = -2$

$U2 + V3 = 10$, $-2 + V3 = 10 \rightarrow V3 = 12$

لاحظ الجدول المبين في الشكل التالي:

الشكل (6- 32) قيم المتغيرات (U_i)، و(V_j)

	D1 V1= 2	D2 V2= 4	D3 V3 = 12	Supply
S1 U1= 0	160 [2]	40 [4]	[6]	200
S2 U2 = -2	[8]	100 [2]	120 [10]	220
Demand	160	140	120	420

يتم حساب التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة وذلك وفق العلاقة:

$$b_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

لذلك سوف يتم الحصول على ما يلي:

الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)

S_1D_3 (X_{13}) $b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 12 = -6$

S_2D_1 (X_{21}) $b_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 8 - (-2) - 2 = 8$

مما تقدم يتضح أن مؤشر التحسين كان موجباً بالنسبة للخلية الفارغة (S_2D_1)، لذلك تعتبر هذه الخلية من أكثر الخلايا الفارغة مساهمتاً في عملية تعظيم الربح، لذلك تعتبر المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

الشكل (6- 33) المسار المغلق لخلية (S_2D_1) التي ستغادر الحل

	D1	D2	D3	Supply
S1	160 [2] -	40 [4] +	[6]	200
S2	[8] +	100 [2] -	120 [10]	220
Demand	160	140	120	420

ويتم تنفيذ هذا التعديل على محتويات الجدول السابق وعندها نحصل على القيم الجديدة المطلوبة للكميات كما هو مبين في الجدول الآتي:

الشكل (6- 34) جدول النقل بعد إجراء التعديل الأول

	D1	D2	D3	Supply
S1	60 [2]	140 [4]	[6]	200
S2	100 [8]	[2]	120 [10]	220
Demand	160	140	120	420

ومن أجل التحقق من أن هذا الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، يتم إعادة الحل مرة أخرى من الخطوة الأولى بإيجاد قيم كل من (U_i) و (V_j) بافتراض أن قيمة (U_1) تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد مؤشر التحسين لكل خلية فارغة وعلى النحو التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U_1 + V_1 = 2 \rightarrow 0 + V_1 = 2 \qquad V_1 = 2$

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U_1 + V_2 = 4 \rightarrow 0 + V_2 = 4 \qquad V_2 = 4$

$S_2D_1\ (X_{21}) \rightarrow U_2 + V_1 = 8 \rightarrow U_2 + 2 = 8 \qquad U_2 = 6$

$S_2D_3\ (X_{23}) \rightarrow U_2 + V_3 = 10 \rightarrow 6 + V_3 = 10 \qquad V_3 = 4$

بناء على ذلك يتم حساب مؤشر التحسين لكل خلية فارغة

الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي)

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 4 = 2$

$S_2D_2\ (X_{22})\ b_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 2 - 6 - 4 = -8$

مما تقدم يتضح أن مؤشر التحسين كان موجباً بالنسبة للخلية الفارغة (S_1D_3)، لذلك تعتبر هذه الخلية من أكثر الخلايا الفارغة مساهمتاً في عملية تعظيم الربح، لذلك تعتبر المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

الشكل (6- 36) المسار المغلق للخلية (S_1D_3) التي ستغادر الحل

	D1	D2	D3	Supply
S1	60 [2]	140 [4]	[6]	200
S2	100 [8]	[2]	120 [10]	220
Demand	160	140	120	420

ويتم تنفيذ هذا التعديل على محتويات الجدول السابق وعندها نحصل على القيم الجديدة المطلوبة للكميات كما هو مبين في الجدول الآتي:

الشكل (6- 37) جدول النقل بعد إجراء التعديل الثاني (الحل أمثل)

	D1	D2	D3	Supply
S1	[2]	140 [4]	60 [6]	200
S2	160 [8]	[2]	60 [10]	220
Demand	160	140	120	420

ومن أجل التحقق من أن هذا الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، يتم إعادة الحل مرة أخرى من الخطوة الأولى بإيجاد قيم كل من (U_i) و (V_j) بافتراض أن قيمة (U_1) تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد مؤشر التحسين لكل خلية فارغة وعلى النحو التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U_1 + V_2 = 4 \rightarrow 0 + V_2 = 4 \qquad V_2 = 4$

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U_1 + V_3 = 6 \rightarrow 0 + V_3 = 6 \qquad V_3 = 6$

$S_2D_1\ (X_{21}) \rightarrow U_2 + V_1 = 8 \rightarrow 4 + V_1 = 8 \qquad V_1 = 4$

$S_2D_3\ (X_{23}) \rightarrow U_2 + V_3 = 10 \rightarrow U_2 + 6 = 10 \qquad U_2 = 4$

بناء على ذلك يتم حساب مؤشر التحسين لكل خلية فارغة

الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي)

$S_1D_1\ (X_{11})\ b_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 2 - 0 - 4 = -2$

$S_2D_2\ (X_{22})\ b_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 2 - 4 - 4 = -6$

مما تقدم يتضح أن كل قيم مؤشر التحسين (b_{ij}) للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هي قيم سالبة لذلك فإن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن قيمة الربح الكلية (Z) عند الحل الأمثل هي:

$$Z = (140)(4) + (60)(6) + (160)(8) + (60)(10) = 2800$$

وهي تمثل قيمة دالة الهدف وهي أعلى ربح ممكن لنقل البضائع من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستلام (الطلب).

3. نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل

$$\text{Max } Z = 2X_{11}+4X_{12}+6X_{13}+8X_{21}+2X_{22}+10X_{23}$$

St.

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} = 200$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} = 220$$

$$X_{11}+X_{21} = 160$$

$$X_{12}+X_{22} = 140$$

$$X_{13}+X_{23} = 120$$

$$X_{ij} \geq 0.0$$

ب. تحويل مشكلة النقل من أرباح إلى تكاليف (بطرح الأرباح من أعلى ربح في الجدول) وحلها كما مر معنا سابقاً. ولتوضيح هذه الطريقة نستخدم مثال شركة الخير الصناعية المبين في الجدول التالي:

مثال (6- 6): الشكل التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، والربح المتحقق من نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بشركة الخير الصناعية.

الشكل (6- 38) بيانات مشكلة النقل الخاصة بشركة الخير الصناعية

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	4	6	200
S2	8	2	10	220
Demand	160	140	120	420

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي **Northwest Corner**
2. إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة (المضاعف) **MODI**.

الحل

في البداية نقوم بتحويل جدول الأرباح إلى تكاليف عن طريق طرح جميع الأرباح في الجدول من أعلى ربح موجود وهو (10) كما هو مبين في الشكل التالي:

الشكل (6- 39) تحويل مشكلة النقل من أرباح إلى تكاليف

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	6	4	200
S2	2	8	0	220
Demand	160	140	120	420

1. يبين الجدول التالي الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

الشكل (6- 40) الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

	D1	D2	D3	Supply
S1	160 [8]	40 [6]	[4]	200
S2	[2]	100 [8]	120 [0]	220
Demand	160	140	120	420

2. الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة

أ. لكل صف (I) في جدول الحل الأول الأساسي للنقل يتم وضع مقابل له (U_i) ولكل عمود يوضع مقابل له (V_j) لذلك فإن شكل جدول النقل يصبح على النحو التالي:

الشكل (6- 41) المتغيرات (U_i)، و(V_j)

	D1 V1	D2 V2	D3 V3	Supply
S1 U1	160 [8]	40 [6]	[4]	200
S2 U2	[2]	100 [8]	120 [0]	220
Demand	160	140	120	420

ج. يتم تجزئة الخلايا في الجدول السابق إلى خلايا فارغة وخلايا ممتلئة.

د. لجميع الخلايا الممتلئة يتم تطبيق العلاقة الرياضية التالية:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

لذلك سوف يتم الحصول على العلاقات الرياضية التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U1 + V1 = 8$ .... (1)

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U1 + V2 = 6$ .... (2)

$S_2D_2\ (X_{22}) \rightarrow U2 + V2 = 8$ .... (3)

$S_2D_3\ (X_{23}) \rightarrow U2 + V3 = 0$ .... (4)

من العلاقات الرياضية السابقة يتضح أن لدينا (5) مجاهيل. لذلك لا يمكن حل هذه المعادلات بالطريقة الطبيعية، وذلك لأن عدد المعادلات لا يساوي عدد المجاهيل، ولحل هذه المشكلة نفترض بأن قيمة (u1) تساوي صفر وعليه فإن:

$U1 + V1 = 8\ ,\ 0 + V1 = 8 \rightarrow V1 = 8$

$U1 + V2 = 6\ ,\ 0 + V2 = 6 \rightarrow V2 = 6$

$U2 + V2 = 8\ ,\ U2 + 6 = 8 \rightarrow U2 = -2$

$U2 + V3 = 0\ ,\ -2 + V3 = 0 \rightarrow V3 = 2$

لاحظ الجدول المبين في الشكل التالي:

الشكل (6- 42) قيم المتغيرات (U_i)، و(V_j)

	D1 V1= 8	D2 V2= 6	D3 V3 = 2	Supply
S1 **U1= 0**	160 [8]	40 [6]	[4]	200
S2 **U2 = -2**	[2]	100 [8]	120 [0]	220
Demand	160	140	120	420

يتم حساب التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة وذلك وفق العلاقة:

$b_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

لذلك سوف يتم الحصول على ما يلي:

الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 4 - 0 - 2 = 2$

$S_2D_1\ (X_{21})\ b_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 2 - (-2) - 8 = -4$

مما تقدم يتضح أن مؤشر التحسين كان سالباً بالنسبة للخلية الفارغة (S_2D_1)، لذلك تعتبر المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

الشكل (6- 43) المسار المغلق للخلية (S_2D_1) التي ستفادر الحل

	D1		D2		D3		Supply
S1	160	8	40	6		4	200
		-		+			
S2		2	100	8	120	0	220
		+		-			
Demand	160		140		120		420

ويتم تنفيذ هذا التعديل على محتويات الجدول السابق وعندها نحصل على القيم الجديدة المطلوبة للكميات كما هو مبين في الجدول الآتي:

الشكل (6- 44) جدول النقل بعد إجراء التعديل الأول

	D1		D2		D3		Supply
S1	60	8	140	6		4	200
S2	100	2		8	120	0	220
Demand	160		140		120		420

ومن أجل التحقق من أن هذا الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، يتم إعادة الحل مرة أخرى من الخطوة الأولى بإيجاد قيم كل من (U_i) و (V_j) بافتراض أن قيمة (U_1) تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد مؤشر التحسين لكل خلية فارغة وعلى النحو التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U_1 + V_1 = 8 \rightarrow 0 + V_1 = 8 \rightarrow V_1 = 8$

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U_1 + V_2 = 6 \rightarrow 0 + V_2 = 6 \rightarrow V_2 = 6$

$S_2D_1\ (X_{21}) \rightarrow U_2 + V_1 = 2 \rightarrow U_2 + 8 = 2 \rightarrow U_2 = -6$

$S_2D_3\ (X_{23}) \rightarrow U_2 + V_3 = 0 \rightarrow -6 + V_3 = 0 \rightarrow V_3 = 6$

بناء على ذلك يتم حساب مؤشر التحسين لكل خلية فارغة

الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي)

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 4 - 0 - 6 = -2$

$S_2D_2\ (X_{22})\ b_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 8 + 6 - 6 = 8$

مما تقدم يتضح أن مؤشر التحسين كان سالباً بالنسبة للخلية الفارغة (S_1D_3)، لذلك تعتبر المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها، كما يلي:

الشكل (6- 45) المسار المغلق للخلية (S_1D_3) التي ستغادر الحل

	D1	D2	D3	Supply
S1	60 [8] -	140 [6]	[4] +	200
S2	100 [2] +	[8]	120 [0] -	220
Demand	160	140	120	420

ويتم تنفيذ هذا التعديل على محتويات الجدول السابق وعندها نحصل على القيم الجديدة المطلوبة للكميات كما هو مبين في الجدول الآتي:

الشكل (6- 46) جدول النقل بعد إجراء التعديل الثاني (الحل أمثل)

	D1	D2	D3	Supply
S1	[8]	140 [6]	60 [4]	200
S2	160 [2]	[8]	60 [0]	220
Demand	160	140	120	420

ومن أجل التحقق من أن هذا الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل، يتم إعادة الحل مرة أخرى من الخطوة الأولى بإيجاد قيم كل من (U_i) و (V_j) بافتراض أن قيمة (U_1) تساوي صفر باستخدام الخلايا الممتلئة، وإيجاد مؤشر التحسين لكل خلية فارغة وعلى النحو التالي:

الخلايا الممتلئة (المتغيرات الأساسية)

$S_1D_1\ (X_{11}) \rightarrow U_1 + V_2 = 6 \rightarrow 0 + V_2 = 6 \quad \rightarrow \quad V_2 = 6$

$S_1D_2\ (X_{12}) \rightarrow U_1 + V_3 = 4 \rightarrow 0 + V_3 = 4 \quad \rightarrow \quad V_3 = 4$

$S_2D_1\ (X_{21}) \rightarrow U_2 + V_1 = 2 \rightarrow\ \ -4 + V_1 = 2 \rightarrow\ V_1 = 6$

$S_2D_3\ (X_{23}) \rightarrow U_2 + V_3 = 0 \rightarrow U_2 + 4 = 0 \quad \rightarrow U_2 = -4$

بناء على ذلك يتم حساب مؤشر التحسين لكل خلية فارغة

الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي)

$S_1D_1\ (X_{11})\ b_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 8 - 0 + 6 = 2$

$S_2D_2\ (X_{22})\ b_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 = 8 + 4 - 6 = 6$

مما تقدم يتضح أن كل قيم مؤشر التحسين (b_{ij}) للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية) هي قيم موجبة لذلك فإن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل وأن قيمة الربح الكلية (Z) عند الحل الأمثل (تؤخذ قيم الأرباح من الجدول الأصلي) هي:

$Z = (140)\ (4) + (60)\ (6) + (160)\ (8) + (60)\ (10) \ \ = 2800$

وهي تمثل قيمة دالة الهدف وهي أعلى ربح ممكن لنقل البضائع من مراكز الإنتاج إلى مراكز الاستلام (الطلب).

6.6 تمارين محلولة

1. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالعرض، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بالشركة العربية الأردنية لصناعة الخشب.

	D1	D2	D3	Supply
S1	6	9	7	**150**
S2	12	3	5	**150**
S3	4	8	11	**200**
Demand	**150**	**100**	**250**	**500**

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

2. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل.

3. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل التقريبية.

4. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

الحل

1. الحل الأولي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

	D1	D2	D3	Supply
S1	150 [6]	[9]	[7]	**150**
S2	[12]	100 [3]	50 [5]	**150**
S3	[4]	[8]	200 [11]	**200**
Demand	**150**	**100**	**250**	**500**

مجموع التكاليف عند الحل الأولي = 3650 دينار

2. الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل

	D1	D2	D3	Supply
S1	[6]	[9]	150 [7]	**150**
S2	[12]	100 [3]	50 [5]	**150**
S3	150 [4]	[8]	50 [11]	**200**
Demand	**150**	**100**	**250**	**500**

مجموع التكاليف عند الحل الأولي = 2750 دينار

3. الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل التقريبية

	D1	D2	D3	Supply
S1	[6]	[9]	150 [7]	150
S2	[12]	100 [3]	50 [5]	150
S3	150 [4]	[8]	50 [11]	200
Demand	150	100	250	500

مجموع التكاليف عند الحل الأولي = 2750 دينار

4. نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل

$$\text{Min } Z = 6X_{11} + 8X_{12} + 7X_{13}$$
$$+ 12X_{21} + 3X_{22} + 5X_{23}$$
$$+ 4X_{31} + 8X_{32} + 11X_{33}$$

Subject to.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 150$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 150$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 200$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 100$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 250$$
$$X_{ij} \geq 0$$

2. أوجد الحل الأمثل لمشكل النقل الخاصة بالشركة العربية الأردنية لصناعة الخشب الواردة في التمرين (6- 1) باستخدام طريقة حجر النقل (المسار المغلق) على أن يكون الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل.

الحل

الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل

	D1	D2	D3	Supply
S1	[6]	[9]	150 [7]	**150**
S2	[12]	100 [3]	50 [5]	**150**
S3	150 [4]	[8]	50 [11]	**200**
Demand	**150**	**100**	**250**	**500**

مجموع التكاليف عند الحل الأولي = 2750 دينار

نختبر أمثلية الحل عن طريق ايجاد المسار المغلق (قيم مؤشرات التحسين) للخلايا الفارغة وعلى النحو الأتي:

$S_1D_1 = +6 - 7 + 11 - 4 = +6$

$S_1D_2 = +9 - 7 + 5 - 3 = +4$

$S_2D_1 = +12 - 5 + 11 - 4 = +14$

$S_3D_2 = +8 - 3 + 5 - 11 = -1$ تدخل الحل

نجد المسار المغلق للخلية S_3D_2 التي سوف تدخل الحل لتحديد الخلية التي ستغادر الحل وعلى النحو الأتي:

$S_3D_2 \rightarrow S_2D_2 \rightarrow S_2D_3 \rightarrow S_3D_3$

المسار المغلق للخلية S_3D_2	- 50	+50	- 100	+
قيم الخلايا الممتلئة بعد النقل		100	50	50

والجدول التالي يبين التعديل بعد إجراء عملية النقل

	D1	D2	D3	Supply
S1	6	9	150 [7]	**150**
S2	12	50 [3]	100 [5]	**150**
S3	150 [4]	50 [8]	11	**200**
Demand	**150**	**100**	**250**	**500**

نختبر أمثلية الحل عن طريق إيجاد المسار المغلق (قيم مؤشرات التحسين) للخلايا الفارغة وعلى النحو الأتي:

$S_1D_1 = +6-4+8-3+5-7 = +5$

$S_1D_2 = +9-7+5-3 = +4$

$S_2D_1 = +12-3+8-4 = +13$

$S_3D_3 = +11-8+3-5 = +1$

بما أن جميع قيم مؤشرات التحسين أكبر من أو تساوي صفر يعتبر الحل أمثل ومجموع التكاليف عند الحل الأمثل يساوي 2700 دينار.

7.6 تمارين الفصل السادس

1. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بالشركة الأردنية لصناعة الأثاث.

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	12	3	20
S2	10	6	11	15
S3	1	4	8	10
S4	7	11	5	25
Demand	30	25	15	70

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method.
2. إيجاد الحل النهائي (الأمثل) باستخدام طريقة التوزيع المعدلة MODI.
3. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

2. تمتلك شركة السفير لصناعة الثلاجات ثلاثة مصانع S1، وS2، وS3، الطاقة الإنتاجية لها (120) ثلاجة، و(80) ثلاجة، و(80) ثلاجة على التوالي. ترغب الشركة بتزويد إنتاجها من الثلاجات إلى ثلاثة مراكز تسويق تابعة لها D1، وD2، وD3، حيث كان حجم الطلب لكل مركز تسويق هو (150)، و(70)، و(60) ثلاجة على التوالي. كلفة نقل الثلاجة الواحدة من S1 إلى كل من D1، وD2، وD3 هي (8)، (5)، و(6) دينار على التوالي. ومن S2 إلى D1، وD2، وD3 هي (15)، (10)، و(12) دينار على التوالي. ومن S3 إلى D1، وD2، وD3 هي (3)، (9)، و(10) دينار على التوالي.

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل
.Vogel's Approximation Method

2. إيجاد الحل النهائي (الأمثل) باستخدام طريقة المسار المتعرج
.Stepping Stone

3. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

3. قام السيد إبراهيم بصفته مدير الإنتاج في الشركة العربية لصناعة الأجهزة الكهربائية، بصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل مشكلة النقل التي تواجهها الشركة على النحو التالي:

$$\text{Min } Z = 5X_{11}+4X_{12}+3X_{13}+8X_{21}+10X_{22}+9X_{23}$$

St.

$$X_{11}+X_{21} = 50$$

$$X_{12}+X_{22} = 100$$

$$X_{13}+X_{23} = 75$$

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} = 100$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} = 125$$

$$X_{ij} \geq 0.0$$

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل Least Cost Method.

2. إيجاد الحل النهائي (الأمثل) باستخدام طريقة المسار المتعرج
.Stepping Stone

4. قام السيد احمد سمير بصفته مدير الإنتاج في الشركة الأردنية لصناعة الملابس، بصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل مشكلة النقل التي تواجهها الشركة على النحو التالي:

$$Min\ Z = 4X_{11}+6X_{12}+8X_{13}+6X_{21}+5X_{22}+4X_{23}$$

St.

$$X_{11}+X_{21} = 185$$

$$X_{12}+X_{22} = 365$$

$$X_{13}+X_{23} = 200$$

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} = 300$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} = 450$$

$$X_{ij} \geq 0.0$$

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل Least Cost Method.
2. إيجاد الحل النهائي (الأمثل) باستخدام طريقة المسار المتعرج Stepping Stone.

5. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بمجموعة الخالد الصناعية.

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	5	6	120
S2	15	10	12	80
S3	3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

المطلوب:

3. إيجاد التكلفة عند الحل الأولي باستخدام طريقة Northwest Corner.

4. إيجاد التكلفة عند الحل الأولي الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل التقريبية.

5. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

6. ما هو فرق التكاليف بين الطريقتين في (1) و(2).

6. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بجوهرة اربد للصناعات الكهربائية

	D1	D2	D3	Supply
S1	10	4	11	70
S2	12	5	8	50
S3	9	7	6	80
Demand	40	50	60	

المطلوب:

1. إيجاد التكلفة عند الحل الأولي باستخدام طريقة Northwest Corner.

2. إيجاد التكلفة عند الحل الأولي الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل التقريبية.

3. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

4. ما هو فرق التكاليف بين الطريقتين في (1) و(2).

7. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بمؤسسة الليث للمياه الصحية.

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	2	60
S2	1	4	2	80
S3	4	3	2	60
Demand	80	80	40	200

المطلوب:

1. إيجاد التكلفة الأولية عند الحل الأولي باستخدام طريقة Northwest Corner.
2. إيجاد التكلفة عند الحل الأمثل باستخدام طريقة عوامل الضرب.
3. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

8. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بإحدى المؤسسات الوطنية.

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	2	40
S2	1	4	2	30
S3	4	3	2	30
Demand	20	30	50	100

9. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di) الخاصة بمجموعة الخالد الصناعية

	D1	D2	D3	Supply
S1	8	12	3	20
S2	10	6	11	15
S3	1	4	8	10
S4	7	11	5	25
Demand	30	25	15	70

المطلوب:

أ. إيجاد الحل الأولي باستخدام:

1. طريقة الركن الشمالي الغربي.

2. طريقة التكلفة الأقل.

3. طريقة فوجل التقريبية.

ب. إيجاد الحل الأمثل باستخدام:

1. طريقة حجر النقل.

2. طريقة التوزيع المعدلة (المضاعف).

ج. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

10. الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية (بالطن) لمصنع الحديد الوطني، والطلب، وتكلفة نقل الطن الواحد من مصادر الإنتاج (Si) إلى مراكز الاستلام (Di).

	D1	D2	D3	Supply
S1	20	16	24	3000
S2	10	10	8	5000
S3	12	18	10	1000
Demand	2000	4000	3000	

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة التكلفة الأقل **Least Cost Method**.
2. إيجاد الحل الأمثل بطريقة التوزيع المعدلة (المضاعف) **MODI**.
3. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل.

أسئلة الاختيار من متعدد Multiple Choice Questions

1. أي من الطرق التالية تستخدم في التحول من الحل الأولي إلى الحل الأمثل في مشاكل النقل:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي.

ب. طريقة المسار الحرج.

ج. طريقة التكلفة الأقل.

د. طريقة حجر النقل.

2. أي من الطرق التالية تستخدم في الوصول إلى أفضل حل الأولي، وأحياناً إلى الحل الأمثل في مشاكل النقل:

أ. طريقة الركن الشمالي الغربي.

ب. طريقة فوجل التقريبية.

ج. طريقة التكلفة الأقل.

د. طريقة المضاعف.

الجدول التالي يبين البيانات المتعلقة بالطاقة الإنتاجية، والطلب، وتكلفة نقل الوحدة الواحدة من مصادر الإنتاج (**Si**) إلى مراكز الاستلام (**Di**) الخاصة بشركة النور للصناعات الكيميائية، أجب عن الأسئلة من (**3**) إلى (**12**).

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	2	40
S2	1	4	2	30
S3	4	3	2	30
Demand	20	30	50	100

3. تكاليف النقل من **S2** إلى **D2** عند الحل الأولي، باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي تساوي:

أ. 120. ب. 80. ج. 40. د. 30.

4. قيمة المتغير X_{33} عند الحل الأولي، باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي تساوي:

أ. 20. ب. 30. ج. 40. د. 50.

5. التكلفة الأولية للنقل عند التوزيع باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي تساوي:

أ. 280. ب. 360. ج. 260. د. 380.

6. التكلفة النهائية عند الحل الأمثل تساوي:

أ. 250. ب. 280. ج. 250. د. 210.

7. **قيمة المتغير X_{13} عند الحل الأمثل، تساوي:**

أ. 50.　　ب. 40.　　ج. 20.　　د. 0.

8. **عند بناء نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل السابقة فإن عدد متغيرات القرار يساوي:**

أ. 7.　　ب. 6.　　ج. 3.　　د.9.

9. **عند بناء نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل السابقة فإن عدد القيود يساوي:**

أ. 9.　　ب. 5.　　ج. 6.　　د.4

10. **نتيجة اختبار المسار المغلق للخلية (S1 D3) (مؤشر التحسين)، عند استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي للتوزيع تساوي:**

أ. 2.　　ب.- 2.　　ج.- 3.　　د. 3.

11. **تكاليف النقل من (S2) إلى (D3)، عند الحل الأمثل تساوي:**

أ. 90.　　ب. 60.　　ج. 30.　　د. 120.

12. **أي من القيود التالية لا يعبر عن قيود نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل:**

أ. $X_{11}+X_{12}+X_{13} \leq 40$

ب. $X_{21}+X_{22}+X_{23} \leq 30$

ج. $X_{11}+X_{21}+X_{31} \leq 20$

د. $X_{31}+X_{32}+X_{33} \leq 30$

13. **عندما يكون عدد الخلايا الفارغة أعلى من من عدد الخلايا الممتلئة تسمى هذه الحالة:**

أ. حالة النقل غير المتوازن.

ب. حالة الانحلال في النقل.

ج. حالة النقل المغلق.

د. حالة النقل المفتوح.

14. تمتلك إحدى الشركات مصنعين، وأربعة مراكز توزيع، وترغب الشركة في حل مشكلة النقل باستخدام أسلوب البرمجة الخطية، ما هو عدد متغيرات القرار للنموذج المطلوب:

أ. 7. ب. 6. ج. 8. د.4.

15. إذا كانت بعض نتائج قيم مؤشرات التحسين في أحد جداول النقل أقل من صفر، وكان الهدف تقليل تكاليف، يدخل الحل:

أ. الخلية الفارغة التي تحمل أعلى مؤشر تحسن بإشارة سالبة.

ب. الخلية الفارغة التي تحمل أقل مؤشر تحسن بإشارة سالبة.

ج. الخلية الممتلئة التي تحمل أعلى مؤشر تحسن بإشارة سالبة.

د. الخلية الفارغة التي تحمل أعلى مؤشر تحسن بإشارة موجبة.

16. الخلية التي سوف تغادر الحل هي خلية ضمن المسار المغلق لإحدى الخلايا التي سوف تدخل الحل، وهي:

أ. الخلية الفارغة التي تحمل أعلى كمية بإشارة سالبة.

ب. الخلية الممتلئة التي تحمل أقل كمية من بين الخلايا السالبة.

ج. الخلية الممتلئة التي تحمل أعلى كمية من بين الخلايا الموجبة.

د. الخلية الفارغة التي تحمل أعلى مؤشر تحسن بإشارة موجبة.

17. عند استخدام طريقة التوزيع المعدلة MODI في إيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل، يجب احتساب قيم المتغيرات Ui ، وVj باستخدام الصيغة التالية:

أ. $Cij = Ui + Vj$.

ب. $Ui - Vj = Cij$.

ج. $Cij - Vj + Ui$.

د. $V_j - U_i = C_{ij}$.

18. عند استخدام طريقة التوزيع المعدلة **MODI** في إيجاد الحل الأمثل لمشكلة النقل، يتم اختبار الخلايا الفارغة باستخدام الصيغة التالية:

أ. $C_{ij} = U_i + V_j$.

ب. $U_i - V_j = C_{ij}$.

ج. $C_{ij} - U_i - V_j$.

د. $V_j - U_i = C_{ij}$.

8.6 مصادر الفصل السادس

1. البلخي، زيد تميم (2007). مقدمة في بحوث العمليات. (ط2)، المملكة العربية السعودية، الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.

2. الفضل، مؤيد عبد الحسين (2006). المنهج الكمي في إدارة الأعمال: نماذج قرارات وتطبيقات عملية.. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

3. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., Williams, Thomas A., & Martin, R. Kipp (2007). **An Introduction to Management Science: A Quantitative Approach to Decision Making**. (12th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company..

4. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill.

5. Powell, Stephen G., & Baker, Kenneth R. (2007). **Management Science: The Art of Modeling with Spreadsheets**. (2ed ed.), USA, New York: Wiley.

6. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

7. Stevenson, William J., & Ozgur, Ceyhun (2006). **Introduction to Management Science with Spreadsheets**. Maidenhead, UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin

8. Taha, Hamdy A., (2007). **Operations Research: An Introduction**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

9. Taylor III, Bernard W. (2007). **An Introduction to Management Science**. (9th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

الفصل السابع

نماذج التعين (التخصيص)

Assignment Model

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد نهاية هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. صياغة النموذج الرياضي (نموذج البرمجة الخطية) لمشكلة التعيين.
2. حل مشاكل التعيين أو التخصيص باستخدام إحدى الطرق التالية: طريقة العد الكامل، الطريقة الهنغارية، طريقة البرمجة الخطية، أو طريقة النقل.
3. معالجة مشاكل التعيين غير المتوازن.

الفصل السابع

نماذج التعيين (التخصيص) Assignment Model

1.7 مقدمة

تبحث نماذج التخصيص في كيفية توزيع عدد معين من الموارد (أفراد، أجهزة، منظمات، ...) على عدد من الأعمال بطريقة تجعل المنفعة العائدة من هذا التوزيع (زمن الإنجاز الكلي للأعمال، تكلفة الإنجاز الكلي للأعمال، الأرباح الناتجة عن إنجاز هذه الأعمال، ...) أفضل ما يمكن ومن أمثلة ذلك توزيع عدد من الموظفين على عدد من الوظائف، و إنجاز عدد معين من المنظمات لعدد معين من المشاريع، وتعمل هذه النماذج بطريقة واحد إلى واحد أي أنه يتم تخصيص كل مورد لواحد فقط من الأنشطة وكل نشاط لواحد فقط من الموارد.

إذا كان عدد الأنشطة أكبر من عدد الموارد أو العكس، يتم استكمال المسألة بإضافة أنشطة وهمية أو موارد وهمية حسب اللازم.

في ضوء التوضيح السابق لمشكلة التعيين، فإن هذا النوع من التطبيقات تتم صياغته في ظل الفروض التالية:

1. عدد الموارد، يساوي تماماً عدد الأنشطة أو المهام.
2. كل مورد يخصص بالضبط لأداء نشاط واحد.
3. كل نشاط يؤديه بالضبط مورد واحد.
4. تكلفة (عائد) تخصيص المورد (I) للنشاط (J) هي (Cij).
5. الهدف هو الوصول إلى التخصيص الأمثل الذي يحقق أدنى تكلفة ممكنة، أو أقصى ربح ممكن.

2.7 النموذج الرياضي العام لمشكلة التعين أو التخصيص

يستخدم النموذج الرياضي لمشكلة التخصيص متغير القرار التالي:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if assigne i performs task j.} \\ 0 & \text{if not.} \end{cases}$$

لذلك فإذا كانت تكلفة (عائد) تخصيص المورد (I) للنشاط (J) هي (Cij) فإن نموذج البرمجة الخطية العام لمشكلة التعيين يكون على النحو الأتي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$S.T$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, ..., n\ Agents$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, ..., n\ Tasks$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad for\ all\ i\ and\ j.$$

ولتوضيح عناصر ومكونات نموذج البرمجة الخطية لمشكلة التخصيص لا بد من تطوير جدول التخصيص الذي على أساسه تتم عملية بناء وصياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة التخصيص، والجدول (7- 1) يوضح مشكلة التعيين أو التخصيص.

الجدول (7- 1) الشكل العام لمشكلة التعيين

نشاط / مورد	A	B	..	N	المتوفر
1	C_{11}	C_{12}	..	C_{1N}	1
2	C_{21}	C_{22}	..	C_{2N}	1
:	:	:	:	:	1
N	C_{N1}	C_{N2}	..	C_{NN}	1
المطلوب	1	1	1	1	N / N

ويمكن صياغة النموذج الرياضي العام لمشكلة التعيين أو التخصيص على النحو التالي:

1. دالة الهدف Objective Function

$$\text{Min (Max) } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots + C_{MN}X_{MN}$$

2. القيود Constraints

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots + X_{1N} = 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots + X_{2N} = 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + \ldots + X_{3N} = 1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$X_{M1} + X_{M2} + X_{M3} + \ldots + X_{MN} = 1$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + \ldots + X_{M1} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + \ldots + X_{M2} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + \ldots + X_{MN} = 1$$

3. شرط أو قيد عدم السلبية Nonnegative Constraint

$$Xij \geq 0 \longrightarrow \text{All variables} \geq 0$$

مثال (7- 1): ترغب مجموعة الليث الصناعية في تخصيص ثلاثة مهندسين كهرباء لإنجاز أعمال صيانة كهربائية في ثلاثة محطات عمل بحيث يتم تخفيض الزمن الكلي اللازم للإنجاز. والجدول (7- 2) يبين الوقت (بالساعات) الذي يحتاجه كل مهندس كهربائي في صيانة كل محطة عمل. والمطلوب هو بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة.

الجدول (7- 2) الوقت (بالساعات) الذي يحتاجه المهندس في صيانة محطة عمل

المحطة / المهندس	A	B	C	المتوفر
إبراهيم	8	10	7	1
أحمد	3	8	5	1
خالد	10	12	11	1
المطلوب	1	1	1	3 / 3

الحل:

$$\text{Min } Z = 8X_{11} + 10X_{12} + 7X_{13} + 3X_{21} + 8X_{22} + 5X_{23} + 10X_{31} + 12X_{32} + 11X_{33}$$

Subject to:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$$
$$X_{ij} \geq 0$$

3.7 طرق حل مشاكل التعيين أو التخصيص

هناك عدة طرق لحل مشاكل التعيين أو التخصيص منها:

1. طريقة العد الكامل Complete Enumeration
2. الطريقة الهنغارية The Hungarian Method (Flood's Technique)
3. البرمجة الخطية Linear Programming
4. النقل Transportation

1.3.7 طريقة العد الكامل Complete Enumeration

يتم في هذه الطريقة تحديد جميع البدائل لتخصيص عدد.معين من الموارد كالموظفين على عدد معين من الأنشطة كالوظائف، بعدها تتم عملية اختيار البديل الأفضل الذي يؤدي إلى تحقيق الهدف كتخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

يمكن إيجاد عدد البدائل باستخدام مبدأ "طرق العد"، فإذا كان لدينا عدد من الموظفين يساوي N فإن عدد البدائل يساوي مضروب N (N!). ولتوضيح هذه الطريقة نطبقها على مثال مجموعة الليث الصناعية التي ترغب في تخفيض زمن إنجاز عمل كل مهندس كهربائي في كل محطة عمل.

عدد المهندسين = 3 لذلك فأن عدد البدائل يساوي مضروب الثلاث (3!)

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

والجدول (7- 3) يعطي البدائل الستة والزمن الناتج عند كل بديل

الجدول (7- 3) البدائل الستة والزمن الناتج عند كل بديل

البدائل	المهندسين			إجمالي الزمن
	إبراهيم	أحمد	خالد	
1	A	B	C	8 + 8 + 11 = 27 hr
2	A	C	B	8 + 5 + 12 = 25 hr
3	B	A	C	10 + 3 + 11 = 24 hr
4	B	C	A	10 + 5 + 10 = 25 hr
5	C	A	B	7 + 3 + 12 = 22 hr
6	C	B	A	7 + 8 + 10 = 25 hr

يلاحظ من الجدول (7- 3) أن أفضل بديل هو البديل الخامس وهو:

المهندس إبراهيم لإنجاز أعمال الصيانة في المحطة (C).

المهندس أحمد لإنجاز أعمال الصيانة في المحطة (A).

المهندس خالد لإنجاز أعمال الصيانة في المحطة (B).

بحيث يكون إجمالي عدد الساعات يساوي (22) ساعة وهو أقل زمن، وتجدر الإشارة هنا بأن تحديد البديل الأفضل يعتمد على هدف الشركة إما تخفيض فيتم عندها اختيار أقل قيمة من بين البدائل، أو تعظيم فيتم اختيار أعلى قيمة من بين البدائل.

إن استخدام هذه الطريقة يبدو بسيطاً، خاصة إذا كان عدد الوظائف أو محطات العمل قليل لا يتجاوز ثلاث وظائف أو محطات عمل مثلاً. ولكن إذا كانت المشكلة تتعلق بأربع محطات عمل مثلاً فإن عدد البدائل يساوي (4!) أي أن عدد البدائل يساوي (24) بديلاً، وفي حالة خمس محطات عمل فإن عدد البدائل يساوي (120) بديلاً وهكذا، وكلما زادت البدائل كلما أصبحت الطريقة غير عملية.

ويمكن استخدام طريقة أخرى بديلة تمكن من تقييم البدائل دفعة واحدة وهي الطريقة الهنغارية

2.3.7 الطريقة الهنغارية Hungarian Method

طَورت هذه الطريقة، لحل مشكلة التخصيص حلاً أكثر فعالية وذلك بالاعتماد على خاصية رياضية اكتشفها العالم الهنغاري كونيغ (Konig)، (ومن هنا جاء اسم هذه الطريقة)

إن استخدام الطريقة الهنغارية في حل مشاكل التخصيص يمّكننا من إيجاد الحل الأمثل دون الحاجة إلى مقارنة بين البدائل كما هو الحال في طريقة العد الكامل.

وتتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل الأمثل، وهذه الخطوات لمشاكل التخفيض هي:

1. نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف في جدول التخصيص.
2. نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود في جدول التخصيص الناتج عن الخطوة الأولى.

3. نغطي أكبر عدد من الأصفار (في الصفوف والأعمدة) بأقل عدد ممكن من الخطوط المستقيمة.

4. إذا كان عدد الخطوط المستقيمة يساوي عدد الصفوف (أو الأعمدة) في جدول التخصيص، نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، ونقوم بعملية التعيين أو التخصيص وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد إلى واحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة، هو لأنها تمثل أصلاً أقل التكاليف أو أعلى الأرباح.

5. إذا كان عدد الخطوط المستقيمة المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل. أي أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات. ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نأخذ أقل قيمة من بين القيم غير المغطاة بخطوط مستقيمة ونطرحها من كافة القيم غير المغطاة بخطوط مستقيمة، وبنفس الوقت نضيف هذه القيمة إلى نقاط تقاطع المستقيمات التي تم وضعها لتغطية الأصفار. وتجدر الملاحظة هنا بأن كيفية رسم الخطوط المستقيمة (أفقياً أو عمودياً) لتغطية الأصفار لا تؤثر على النتائج النهائية ما دمنا متأكدين من الدقة في تحديد عددها. وقد يتم الحصول على أكثر من حل إلا أنها جميعاً يجب أن تؤدي إلى نفس النتيجة.

6. الاستمرار في تطبيق الخطوات (3 و 5) حتى ننهي الحل.

مثال (7- 2): ترغب إدارة شركة الأردن لخدمات الصيانة في تخصيص أربعة عمال مدربين للعمل على أربعة مكائن معينة، وأن تكاليف اشتغال العمال على المكائن المذكورة هي كما في الجدول (7- 4):

الجدول (7- 4) تكاليف اشتغال العمال على المكائن

المكائن / العمال	I	II	III	IV
علاء	5	7	9	6
جواد	14	13	10	4
عدي	15	11	12	5
يامن	10	17	9	11

المطلوب: استخدام الطريقة الهنغارية لإيجاد أفضل تخصيص أو تعيين يحقق أقل تكلفة.

لحل هذه المثال، نطبق الخطوات السابقة وذلك كما يلي:

1. عملية طرح الصفوف: نطرح أقل قيمة من كل صف من باقي قيم ذلك الصف

الجدول (7- 5) طرح الصفوف

المكائن / العمال	I	II	III	IV
علاء	0	2	4	1
جواد	10	9	6	0
عدي	10	6	7	0
يامن	1	8	0	2

2. عملية طرح الأعمدة: تطرح أقل قيمة من كل عمود في الجدول السابق من باقي قيم ذلك العمود.

الجدول (7- 6) طرح الأعمدة

المكائن / العمال	I	II	III	IV
علاء	0	0	4	1
جواد	10	7	6	0
عدي	10	4	7	0
يامن	1	6	0	2

3. نغطي أكبر عدد من الأصفار في الجدول بأقل عدد ممكن من المستقيمات. كما هو مبين على الجدول الأتي:

الجدول (7- 7) اختبار أمثلية الحل

المكائن / العمال	I	II	III	IV
علاء	0	0	4	1
جواد	10	7	6	0
عدي	10	4	7	0
يامن	1	6	0	2

4. بما أن عدد المستقيمات أو الخطوط العمودية والأفقية المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة. نختار اقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من باقي القيم غير المغطاة ونضيفها إلى نقاط تقاطع الخطوط أو المستقيمات. كما هو مبين في الجدول الأتي:

الجدول (7- 8) تعديل الحل

المكائن / العمال	I	II	III	IV
علاء	0	0	4	5
جواد	6	3	2	0
عدي	6	0	3	0
يامن	1	6	0	6

5. نكرر الخطوات السابقة (3 و 4)، حيث نغطي أكبر عدد من الأصفار في الجدول بأقل عدد ممكن من المستقيمات كما هو مبين في الجدول السابق، وبما أن عدد المستقيمات يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة في الجدول، نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، ويتم اختيار الحل كالتالي:

- اختيار الصفر الوحيد في أي صف أو عمود أولاً ويحذف أي صفر آخر في ذلك الصف أو العمود.

نبدأ في الصف الثاني ونختار الصفر (جواد - **IV**) ونحذف باقي الأصفار في العمود الرابع

نبدأ في الصف الثالث ونختار الصفر (عدي - **II**) ونحذف باقي الأصفار في العمود الثاني

نبدأ في الصف الأول ونختار الصفر (علاء - **I**) ونحذف باقي الأصفار في العمود الأول

نبدأ في الصف الرابع ونختار الصفر (يامن - **III**) ونحذف باقي الأصفار في العمود الثالث

وعلى هذا الاساس يتم:

1. تخصيص العامل (علاء) للعمل على الماكينة رقم (1).
2. تخصيص العامل (جواد) للعمل على الماكينة رقم (4).
3. تخصيص العامل (عدي) للعمل على الماكينة رقم (2).
4. تخصيص العامل (يامن) للعمل على الماكينة رقم (3).

وبالتالي فإن أقل التكاليف من الجدول الأصلي والناتجة عن هذا التخصيص هي:

الجدول (7- 9) التخصيص الأمثل

المكاينة	العامل	التكلفة
I	علاء	5
IV	جواد	4
II	عدي	11
III	يامن	9
مجموع التكاليف		29 JD

مثال (7- 3) مؤسسة صناعية أردنية ترغب في تخصيص أربعة عمال لإنجاز أربعة وظائف وكانت الأرباح بالدينار الناتجة عن قيام العمال بإنجاز الوظائف كما هو مبين في الجدول (7- 10).

الجدول (7- 10) الأرباح بالدينار الناتجة عن قيام العمال بإنجاز الوظائف

الوظائف / العمال	S_1	S_2	S_3	S_4
A	12	11	8	16
B	10	9	10	8
C	14	8	7	11
D	6	8	10	9

المطلوب:

استخدام الطريقة الهنغارية لإيجاد الحل الأمثل الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

لأن المسألة تعظيم أرباح يجب تحويلها إلى تخفيض تكاليف عن طريق طرح جميع القيم (الأرباح) في الجدول من أعلى قيمة في نفس الجدول وهي (16)، وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الأتي:

الجدول (7- 11) تحويل مشكلة التخصيص من أرباح إلى تكاليف

الوظائف / العمال	S_1	S_2	S_3	S_4
A	4	5	8	0
B	6	7	6	8
C	2	8	9	5
D	10	8	6	7

نطبق على هذا الجدول خطوات التقليل (التخفيض) التي مرت سابقاً على النحو التالي:

1. عملية طرح الصفوف: نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف.

الجدول (7- 12) طرح الصفوف

الوظائف / العمال	S_1	S_2	S_3	S_4
A	4	5	8	0
B	0	1	0	2
C	0	6	7	3
D	4	2	0	1

2. عملية طرح الأعمدة: نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود، ونختبر أمثلية الحل، عن طريق تغطية أكبر عدد من الأصفار بأقل عدد من المستقيمات أو الخطوط كما هو مبين في الجدول الأتي:

الجدول (7- 13) طرح الأعمدة واختبار أمثلية الحل

العمال \ الوظائف	S_1	S_2	S_3	S_4
A	4	4	8	0
B	0	0	0	2
C	0	5	7	3
D	4	1	0	1

3. بما أن عدد المستقيمات (الخطوط) يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة في الجدول نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وعلى هذا الأساس يتم:

1. تخصيص العامل (A) لإنجاز الوظيفة (S_4).
2. تخصيص العامل (C) لإنجاز الوظيفة (S_1).
3. تخصيص العامل (D) لإنجاز الوظيفة (S_3).
4. تخصيص العامل (B) لإنجاز الوظيفة (S_2).

مجموع الأرباح عند الحل الأمثل (القيم من الجدول الأصلي):

$$16 + 14 + 10 + 9 = 49$$

3.3.7 طريقة البرمجة الخطية Linear Programming Method

تعتبر مسألة التخصيص حالة خاصة من مسألة النقل، لذلك يمكن صياغة نموذج برمجة خطية لمشاكل التخصيص أو التعيين كما مر معنا في بداية الفصل حيث يمكن استخدام الطريقة المبسطة في حل نموذج البرمجة الخطية لمشكلة التخصيص ولكن بمساعدة الحاسوب. حيث تظهر النتائج كما هو مبين في الشكل التالي، حيث. أن (Xij) تشير إلى تخصيص المورد (I) للنشاط (J).

الشكل (7- 1) الحل الأمثل لمشكلة التخصيص باستخدام الحاسوب

Variable	Status	Value
X11	NONBasic	0.
X12	Basic	0.
X13	Basic	1.
X21	Basic	1.
X22	NONBasic	0.
X23	NONBasic	0.
X31	Basic	0.
X32	Basic	1.
X33	NONBasic	0.
slack 1	NONBasic	0.
slack 2	NONBasic	0.
slack 3	Basic	0.
artfcl 4	NONBasic	0.
artfcl 5	NONBasic	0.
artfcl 6	NONBasic	0.
Optimal Value (Z)		22.

4.3.7 طريقة النقل Transportation Method

نتبع هنا نفس خطوات طريقة النقل ما عدا أن كميات العرض والطلب جميعها تكون تساوي (1). وفي حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة، فإننا نضيف صفاً أو عموداً وهمياً حسب الحاجة، وتكون قيم ذلك العمود أو الصف أصفاراً وكمية العرض أو الطلب به (1). وبعدها نقوم بعملية الحل كما مر سابقاً ووفق قواعد طريقة النقل.

وفيما يلي جدول النقل الخاص بمشكلة مجموعة الليث الصناعية (مثال رقم (7- 1))

	A	B	C	Supply
ابراهيم	8	10	7	1
أحمد	3	8	5	1
خالد	10	12	11	1
Demand	1	1	1	3

نجد الحل باستخدام طريقة مؤجل التقريبية، كما هو واضح في الجدول الأتي:

إلى / من	A	B	C	Supply	
ابراهيم	8	10	1	7	1	1 3
أحمد	1	3	8	5	1	2 يحذف
خالد	10	1	12	11	1	1 1
الطلب	1	1	1	3	
	5	2	2		
	يحذف	2	4		

ويكون أفضل تخصيص هو

1. إبراهيم ⟵ C
2. أحمد ⟵ A
3. خالد ⟵ B

مجموع الساعات = 7 + 3 + 12 = 22 ساعة

كما يمكننا استخدام الحاسوب في حل نماذج التخصيص حيث تظهر النتائج كما هو مبين في الشكل الأتي:

الشكل (7- 2) حل مشاكل التخصيص باستخدام الحاسوب (برمجية QM)

Assignments			
	Layth Industrial Group Solution		
Optimal cost = $22	A	B	C
ابراهيم	8.	10.	Assign 7
أحمد	Assign 3	8.	5.
خالد	10.	Assign 12	11.

4.7 نموذج التخصيص (التعيين) غير المتوازن

الوضع الطبيعي يتطلب أن يكون عدد الوظائف أو المشاريع أو المكائن مساوياً لعدد الموظفين أو المديرين أو العاملين، لكن في بعض الأحيان يكون العدد غير متساو. أي أن عدد الصفوف اقل من عدد الأعمدة أو عدد الأعمدة اقل من عدد الصفوف. وفي هذه الحالة يجب موازنة النموذج بإضافة صف أو عمود وهمي حسب الحاجة تكون قيم ذلك الصف أو العمود الوهمي صفر، ونقوم بعملية الحل كالمعتاد.

مثال (7- 4): يتوفر لدى مؤسسة مجد الدين للبحوث التسويقية أربعة مدراء مشاريع ترغب في تخصيصهم لثلاثة عملاء. والجدول (7- 14) يبين الوقت (بالأيام) الذي يحتاجه كل مدير مشروع لإنجاز العمل المطلوب منه لدى العملاء الثلاثة:

الجدول (7- 14) الوقت (بالأيام) الذي يحتاجه كل مدير مشروع لإنجاز العمل المطلوب منه

العملاء / المديرين	X	Y	Z
محمد	10	15	9
ليث	9	18	5
مجد الدين	6	14	3
أحمد	8	16	6

المطلوب:

إيجاد أفضل تخصيص يقلل الزمن الكلي للإنجاز

في البداية يجب موازنة النموذج بإضافة عميل رابع وهمي:

الجدول (7- 15) موازنة نموذج التخصيص بإضافة عميل رابع وهمي

العملاء / المديرين	X	Y	Z	w
محمد	10	15	9	0
ليث	9	18	5	0
مجد الدين	6	14	3	0
أحمد	8	16	6	0

الآن نستخدم إحدى طرق التعيين للوصول إلى الحل الأمثل ولتكن الطريقة الهنغارية:

1. عملية طرح الصفوف ينتج عنها:

الجدول (7- 16) طرح الصفوف

العملاء / المديرين	X	Y	Z	w
محمد	10	15	9	0
ليث	9	18	5	0
مجد الدين	6	14	3	0
أحمد	8	16	6	0

2. عملية طرح الأعمدة ينتج عنها

الجدول (7- 17) طرح الأعمدة واختبار أمثلية الحل

المديرين \ العملاء	X	Y	Z	w
محمد	4	1	6	0
ليث	3	4	2	0
مجد الدين	0	0	0	0
أحمد	2	2	3	0

3. نغطي أكبر عدد من الأصفار بأقل عدد من الخطوط أو المستقيمات.

4. بما أن عدد الخطوط أو المستقيمات التي تغطي الأصفار أقل من عدد الأعمدة أو الصفوف، نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من باقي القيم غير المغطاة ونضيفها إلى نقطة تقاطع الخطوط أو المستقيمات.

جدول (7- 18) التعديل الأول للحل

المديرين \ العملاء	X	Y	Z	w
محمد	3	0	5	0
ليث	2	3	1	0
مجد الدين	0	0	0	1
أحمد	1	1	2	0

5. نكرر الخطوة الثالثة، وبما أن عدد الخطوط لا يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة نكرر الخطوة الرابعة السابقة.

جدول (7- 19) التعديل الثاني للحل

العملاء / المديرين	X	Y	Z	w
محمد	2	0	4	0
ليث	1	3	0	0
مجد الدين	0	1	0	2
أحمد	0	1	1	0

الحل الأمثل:

محمد ⟶ Y = 15

ليث ⟶ Z = 5

مجد الدين ⟶ X = 6

أحمد ⟶ W = 0

المجموع = 26 days

لاحظ أنه يوجد حل أمثل بديل بحيث يتم التخصيص كما يلي:

محمد إلى Y وبزمن (15) يوم.

ليث إلى W وبزمن (0) يوم.

مجد الدين إلى Z وبزمن (3) يوم.

أحمد إلى X وبزمن (8) يوم.

المجموع = 15+0+3+8= 26 يوم

5.7 تمارين محلولة

1. ترغب المؤسسة الوطنية لصناعة السجاد في تعيين عدد من مهندسي التصميم لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد الموظفين ثلاثة، وكانت التكاليف (بالدينار) الناتجة عن قيام المهندسين بأعمالهم هي كالآتي:

	A	B	C
احمد	12	10	14
محمد	10	11	13
ابراهيم	13	9	12

الحل

1. طرح الصفوف

	A	B	C
احمد	2	0	4
محمد	0	1	3
ابراهيم	4	0	3

2. طرح الأعمدة

	A	B	C
احمد	2	0	1
محمد	0	1	0
ابراهيم	4	0	0

3. اختبار أمثلية الحل

	A	B	C
احمد	2	0	1
محمد	0	1	0
ابراهيم	4	0	0

من الخطوة السابقة نجد بأن الحل أمثل، وعليه نقوم بإجراء عملية التخصيص، وعلى النحو الأتي:

- يخصص أحمد لإنجاز الوظيفة B ويتكلفة مقدارها 10 دنانير.
- يخصص محمد لإنجاز الوظيفة A وبتكلفة مقدارها 10 دنانير.
- يخصص إبراهيم لإنجاز الوظيفة C وبتكلفة مقدارها 12 دنانير.

فيكون مجمع الحد الأدنى من التكاليف يساوي 32 دينار.

6.7 تمارين الفصل السابع

1. ترغب مؤسسة الليث لصناعة البرمجيات في تعيين عدد من حملة بكالوريوس "نظم المعلومات الإدارية" لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد الموظفين ثلاثة، وكانت التكاليف (بالدينار) الناتجة عن قيام الموظفين بأعمالهم هي كالآتي:

	A	B	C
احمد	11	8	12
محمد	13	11	8
ابراهيم	6	8	10

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة العد الكامل.
2. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة التعيين.[

2. يتوفر لدى مؤسسة اربد لتدقيق الحسابات عدد من المحاسبين، وترغب في تخصيص أربعة منهم لتدقيق حسابات أربعة شركات، فإذا كان الوقت (بالساعة) الذي يحتاجه كل محاسب عند قيامه بعمله هو كالآتي:

	A	B	C	D
احمد	32	18	32	26
ليث	22	24	12	16
محمد	24	30	26	24
ابراهيم	26	30	28	20

المطلوب:

1. إيجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة الهنغارية.
2. صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة التعيين.
3. حسب جدول الحل الأمثل، أي المحاسبين ممكن أن يعين لتدقيق حسابات الشركة C.

3. يتوفر لدى الشركة العربية الأردنية للصناعات الدوائية أربعة مهندسين ترغب الشركة في تخصيصهم لإنجاز عدد من الوظائف، وكانت التكاليف (بالدينار) الناتجة عن قيام الموظفين بأعمالهم هي كالآتي:

	A	B	C	D
احمد	3	5	7	4
ليث	12	11	8	2
خالد	13	9	10	3
محمد	8	15	7	9

المطلوب

إيجاد التوزيع الأمثل للموظفين باستخدام الطريقة الهنغارية بحيث يتم تحقيق أدنى تكلفة ممكنة ؟

4. ترغب الشركة الوطنية لتطوير أنظمة الحاسوب في تعيين عدد المبرمجين لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد المبرمجين أربعة، وكانت الأرباح (بالدينار) الناتجة عن قيام المبرمجين بأعمالهم هي كالآتي:

	A	B	C	D
احمد	6	15	4	5
محمد	9	7	6	1
خالد	5	11	1	7
مجد الدين	14	18	9	10

المطلوب:

إيجاد التوزيع الأمثل للموظفين باستخدام الطريقة الهنغارية بحيث يتم تحقيق أعلى ربح ممكن؟

5. ترغب مؤسسة الملاك لصناعة البرمجيات في تعيين عدد من الموظفين لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد الموظفين أربعة، وكانت الأرباح (بالدينار) الناتجة عن قيام الموظفين بأعمالهم هي كالآتي:

	A	B	C	D
احمد	11	20	9	10
محمد	14	12	11	6
ابراهيم	10	16	6	12
عمر	19	23	24	25

المطلوب:

إيجاد التوزيع الأمثل للموظفين باستخدام الطريقة الهنغارية بحيث يتم تحقيق أعلى ربح ممكن؟

6. ترغب شركة الشمال لنقل الركاب في تعيين عدد من الموظفين لصيانة عدد من حافلاتها العاملة في منطقة الشمال، فإذا كان عدد الموظفين ثلاثة، وكانت التكاليف الناتجة عن قيام الموظفين بأعمالهم هي كالآتي:

	حافلة 1	حافلة 2	حافلة 3	حافلة 4
سالم	6	15	4	5
قصي	9	7	6	1
مشافق	5	11	1	7

المطلوب: إيجاد التوزيع الأمثل للموظفين باستخدام الطريقة الهنغارية بحيث يتم تحقيق أقل تكلفة ممكنة؟

7.7 مصادر الفصل السابع

1. البلخي، زيد تميم (2007). مقدمة في بحوث العمليات. (ط2)، المملكة العربية السعودية ، الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.
2. حمدان، فتحي خليل، و رشيق رفيق (2002). مقدمة في بحوث العمليات. (ط3). الأردن، عمان: دار وائل للنشر والتوزيع.
3. الفضل، مؤيد عبد الحسين (2008). الأساليب الكمية والنوعية في دعم قرارات المنظمة. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.
4. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., Williams, Thomas A., & Martin, R. Kipp (2007). **An Introduction to Management Science: A Quantitative Approach to Decision Making**. (12th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company..
5. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill.
6. Powell, Stephen G., & Baker, Kenneth R. (2007). **Management Science: The Art of Modeling with Spreadsheets.** (2ed ed.), USA, New York: Wiley.
7. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
8. Stevenson, William J., & Ozgur, Ceyhun (2006). **Introduction to Management Science with Spreadsheets.** Maidenhead, UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin
9. Taha, Hamdy A., (2007). **Operations Research: An Introduction.** (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
10. Taylor III, Bernard W. (2007). **An Introduction to Management Science**. (9th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

الفصل الثامن

إدارة المشاريع: طريقة المسار الحرج وبيرت

Project Management: CPM/PERT

محتويات الفصل

أهداف الفصل

بعد دراسة هذا الفصل ينبغي أن تكون قادراً على:

1. تحديد الفروق الأساسية بين طريقة المسار الحرج وطريقة مراجعة وتقييم برامج المشاريع.
2. تحديد مفهوم: النشاط، النشاط الحرج، المسار، المسار الحرج، شبكة الأعمال، والحدث.
3. استخدام طريقة السار الحرج CPM و طريقة تقويم ومراجعة البرامج PERT لجدولة المشاريع وتخطيطها.
4. استخدام نموذج بيرت التكلفة لتقليل الزمن الكلي للمشروع بأقل تكلفة ممكنة عن طريق تعجيل المشروع.
5. صياغة نموذج البرمجة الخطية لشبكات الأعمال.
6. صياغة نموذج البرمجة الخطية لتعجيل المشروع

الفصل الثامن

إدارة المشاريع: طريقة المسار الحرج وبيرت

Project Management: CPM/PERT

1.8 المقدمة

يعتبر التخطيط والرقابة من الوظائف الأساسية في المشاريع والمنظمات المختلفة، ويعد التخطيط الخطوة الأولى في إدارة المشاريع وأن نجاح أو فشل الخطوات التالية في المشروع يعتمد على التخطيط. لذلك أصبح التخطيط في الوقت الحاضر سمة من سمات التطور وتعتبر شبكات الأعمال أحد أساليب التخطيط الفعالة، وتعرف بأنها أحد أساليب بحوث العمليات التي تستخدم لأغراض التخطيط والرقابة في المشاريع المختلفة. اي أن الهدف من شبكات الأعمال هو التخطيط ومراقبة تنفيذ برنامج أو مشروع معين مكون من عدة مراحل أو عمليات

إن أي مشروع يتكون من مجموعة من الأنشطة المتداخلة والمترابطة وفق ترتيب منطقي معين يجب مراعاته لدى القيام بتنفيذ ذلك المشروع. وتظهر أهمية هذا التداخل والترتيب المنطقي للأنشطة التي يتكون منها المشروع مع ملاحظة أنه من غير الممكن أن نبدأ في تنفيذ بعضها قبل استكمال تنفيذ بعضها الآخر.

وتتميز المشاريع بكونها فريدة من نوعها بمعنى أنها مجموعة من العمليات أو الأنشطة التي تنفذ في وقت ما لتحقيق مجموعة من الأهداف وخلال وقت محدد. كبر حجم المشاريع وارتفاع تكاليفها وتعقيدها يجعلها بحاجة ماسة إلى التخطيط المسبق والدقيق، ويرجع السبب في ذلك إلى أن المشاريع يجب أن يتم تنفيذها في أوقات محددة إضافة إلى ارتفاع تكاليف التنفيذ الناتجة عن أي خطأ في التخطيط أو التنفيذ. من هنا فإن إدارة المشاريع تتطلب من العاملين التعرف على كيفية إدارة هذه المشاريع بكفاءة وفعالية وذلك من خلال التخطيط المسبق والجدولة للفعاليات التي يتضمنها المشروع والأولويات فيما بينها بشكل يخفف من نسبة المخاطر ويرفع من مستوى الإنجاز المطلوب

وما يهم مديري أو منفذي المشاريع المختلفة هو:

1. معرفة التداخل والتسلسل المنطقي للأنشطة التي يتكون منها المشروع.

2. معرفة بداية ونهاية كل نشاط من أنشطة المشروع.

3. معرفة الأنشطة الأكثر أهمية (الحرجة: Critical) والتي يترتب على تأخير تنفيذها تأخير في تنفيذ كامل المشروع. ومعرفة الأنشطة الأقل أهمية (غير الحرجة) والتي يمكن تأجيل تنفيذها بعض الوقت دون أن يؤدي ذلك إلى أي تأخير في تنفيذ المشروع.

والهدف من هذه المعرفة هو:

أ. وضع خطة لتنفيذ المشروع في أقل زمن ممكن (و/أو بأقل تكلفة ممكنة).

ب. دراسة إمكانية تغيير تسلسل الأنشطة بحيث نقلل زمن تنفيذ المشروع (و/أو من تكلفة تنفيذه).

ج. إعادة توزيع الموارد المتاحة بحيث يمكن التعجيل في تنفيذ الأنشطة الحرجة وتأخير تنفيذ الأنشطة غير الحرجة.

2.8 المسار الحرج، ومراجعة وتقييم البرامج CPM/PERT

لقد تم تطوير مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها في التخطيط والرقابة على المشروع، من أشهر هذه الأساليب: أسلوب المسار الحرج

Critical Path Method (CPM)، وطريقة مراجعة وتقييم برامج المشاريع Program Evaluation & Review Technique (PERT). ويعتمد هذان الأسلوبان على التحليل العلمي لتخطيط المشاريع وجدولتها ومراقبتها وضبطها. ولدراسة المشاريع بواسطتهما يتم اللجوء إلى تمثيل تلك المشاريع بشبكة موجهة توضح طريقة تداخل وترابط وتسلسل الأنشطة والحوادث التي تتكون منها هذه المشاريع.

3.8 الفروق الأساسية بين طريقة المسار الحرج وطريقة مراجعة وتقييم برامج المشاريع.

يوجد فرقين أساسيين بين هذين الأسلوبين هما: (1) تقدير زمن تنفيذ الأنشطة: ففي طريقة المسار الحرج يكون زمن تنفيذ كل نشاط من الأنشطة المكونة للمشروع معطى بشكل محدد، أما في طريقة مراجعة برامج المشاريع فيعطى كل زمن من أزمنة تنفيذ الأنشطة ثلاثة تقديرات مبنية على أسس احتمالية ثم يصار إلى حساب المتوسط الموزون لهذه التقديرات بناء على وزن مناسب يعطى لكل تقدير. (2) إمكانية حساب تكلفة المشروع وعلاقة هذه التكلفة بزمن التنفيذ حيث يمكن ذلك باستخدام أسلوب المسار الحرج (CPM) فقط، وذلك لأن الأزمنة في هذا الأسلوب مبنية على معلومات محددة وبالتالي فالأخطاء في تقديرها قليلة.

إن استخدام أسلوبي (CPM) و (PERT) يسمح بتحديد الأنشطة الحرجة وأيضاً بتحديد التأخير الممكن في تنفيذ كل نشاط من الأنشطة غير الحرجة والذي يشار إليها عادة بالزمن العائم (Float Time) أو بالزمن الراكد (Slack Time)، بالإضافة إلى ذلك فإن أسلوبي (CPM) و (PERT) يفيدان في تحليل كثير من الجوانب المتعلقة بالمشروع كإيجاد توازن في استخدام الموارد وإعادة جدولة مثل هذا الاستخدام للوصول إلى نتائج أفضل.

إن (CPM) و (PERT) يهدفان إلى تنسيق وتنظيم جميع عناصر المشروع في إطار خطة رئيسية من أجل تكوين نموذج عمل لإنجاز المشروع بتكاليف وأوقات ملائمة وبأقل المخاطر.

4.8 الإطار العام لأسلوبي CPM و PERT

تمثل الخطوات الست التالية الإطار العام لأسلوبي (CPM) و (PERT:):

1. تعريف المشروع وتحديد جميع الأنشطة أو المهام الأساسية المتعلقة به.
2. تقرير أو تحديد العلاقات بين الأنشطة المختلفة للمشروع. أي تحديد الأنشطة التي تسبق أو تتبع الأنشطة الأخرى (تحديد التداخل والتسلسل المنطقي بين الأنشطة).

3. رسم الشبكة الممثلة لأنشطة المشروع.

4. تقدير الوقت و/أو التكلفة المصاحبة لكل نشاط.

5. حساب أطوال المسارات المختلفة في الشبكة وتحديد أطولها، وهو ما يدعى بالمسار الحرج.

6. استخدام الشبكة للمساعدة في تخطيط وجدولة ومتابعة ومراقبة المشروع.

5.8 طريقة المسار الحرج CPM

النشاط الحرج هو نشاط يترتب على أي تأخير كان طفيفاً في زمن تنفيذه تأخير في زمن تنفيذ كامل المشروع. أما المسار الحرج فهو عبارة عن مجموعة من الأنشطة الحرجة المتتابعة من بداية المشروع إلى نهايته والذي يتطلب زمناً أكثر من كافة المسارات في الشبكة، ويعتبر هذا المسار هو الأكثر خطورة في شبكة المشروع.

1.5.8 خطوات تحديد المسار الحرج

يتطلب تحديد المسار الحرج إتباع مجموعة من الخطوات المتسلسلة كما يلي:

1. تجزئة المشروع وتحديد الأنشطة التي يتكون منها المشروع.

2. تحديد العلاقات والتسلسل المنطقي بين الأنشطة، أي تحديد تتابع تنفيذ الأنشطة منذ بداية المشروع لحين الانتهاء من تنفيذه.

3. تحديد الأوقات والموارد اللازمة لتنفيذ كل نشاط من أنشطة المشروع.

4. رسم المخطط الشبكي الممثل لأنشطة المشروع وفقاً لطبيعة العلاقات والتسلسل المنطقي بين أنشطة المشروع، حيث أن هذه الأنشطة تعتمد على بعضها البعض، أي أنه لا يمكن البدء ببعضها قبل إنهاء نشاط أو مجموعة من الأنشطة الأخرى.

5. تحديد وقت البداية المبكر (Earliest Start) لكل نشاط من الأنشطة. وهذا يعني أبكر أو أسرع زمن يمكن أن نبدأ به كل نشاط. ويكون هذا الوقت دائماً يساوي صفر لأول نشاط أو مجموعة الأنشطة الواقعة في بداية المشروع.

6. تحديد وقت الإنهاء المبكر (Earliest Finish) لكل نشاط. وهو عبارة عن وقت البداية المبكر لأي نشاط مضافاً إليه الوقت اللازم لتنفيذه.

7. تحديد وقت البداية المتأخر (Latest Start)، وهو يمثل أقصى تأخير في أوقات بداية الأنشطة دون أن يؤثر ذلك على المشروع بأكمله.

8. تحديد وقت الإنهاء المتأخر (Latest Finish) وهو عبارة عن وقت البداية المتأخر لأي نشاط مضافاً إليه الوقت اللازم لتنفيذه.

9. تحديد الوقت الفائض (الراكد) وهو عبارة عن الفرق بين الأوقات المبكرة أو الفرق بين الأوقات المتأخرة.

10. تحديد المسار الحرج وهو عبارة عن مجموعة الأنشطة التي قيمة الوقت الفائض أو الراكد عندها تساوي صفر.

2.5.8 رسم المخطط الشبكي للمشروع

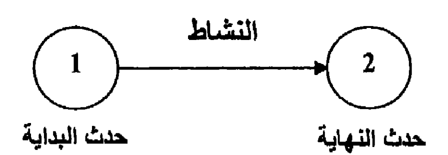
يمكن إيجاز أسس وقواعد بناء شبكات الأعمال كالآتي:

يبدأ المخطط الشبكي بحدث واحد فقط هو حدث البداية وينتهي كذلك بحدث واحد فقط هو حدث النهاية. والحدث Event هو إنجاز واحد أو أكثر من الأنشطة عند لحظة محددة من الزمن. وللوصول إلى حدث معين لا بد من إنجاز جميع الأنشطة التي تسبقه، ويمكن النظر إلى الحدث على أنه هدف نرغب الوصول إليه، وإلى الأنشطة التي تسبقه بأنها وسائل للوصول إلى الهدف.

1. كل نشاط يمثل بسهم واحد فقط ويشير رأس السهم إلى اتجاه انسياب العمل.

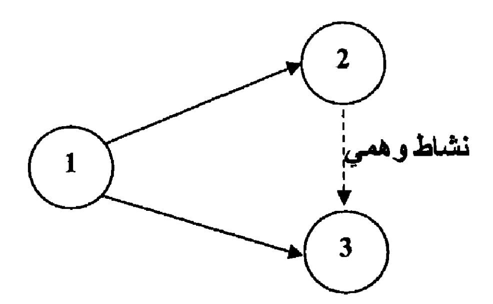
2. كل نشاط يجب أن يبدأ وينتهي بحدث، حيث يربط النشاط (السهم) بين حدثين متتاليين في الشبكة كما هو مبين في الشكل (1).

الشـكل (1) تمثيل النشاط بسهم بين حدثين



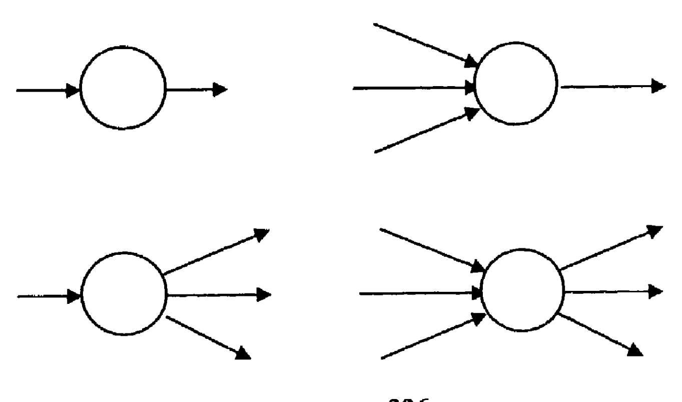
ولا يمكن ربط حدثين بأكثر من نشاط واحد، ولمعالجة هذه الحالات يتم الاستعانة بالأنشطة الوهمية كما هو مبين في الشكل (2).

الشـكل (2) تمثيل الأنشطة الوهمية



3. يمكن أن يلتقي عند الحدث الواحد نشاط سابق واحد أو عدة أنشطة سابقة ويتولد منه نشاط واحد أو عدة أنشطة كما هو مبين في الشكل (3).

الشـكل (3) تمثيل الأنشطة الداخلة والخارجة من الحدث



4. يجب المحافظة على التسلسل والتتابع المنطقي لمراحل تنفيذ المشروع وذلك بتحديد تعاقب تنفيذ الأنشطة حسب تسلسلها المنطقي.

5. لا يمكن أن تبدأ الأنشطة الخارجة من الحدث ما لم تنجز كافة الأنشطة الداخلة فيه.

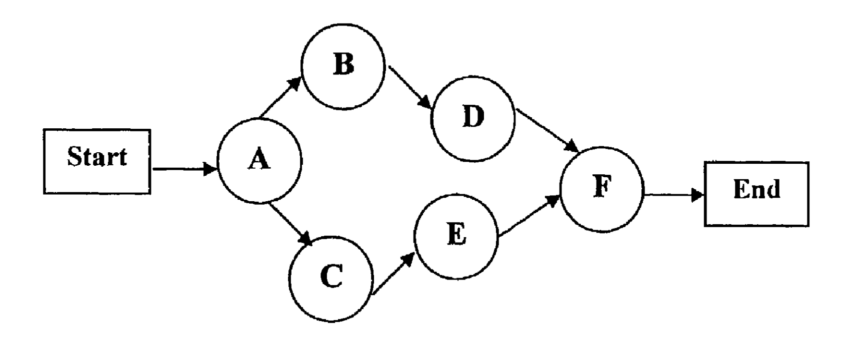
وقد تمثل الأنشطة بدوائر أو عُقَد (Activity on Node) بدل الأحداث حيث أن كل نشاط يمثل بدائرتين، الأولى تشير إلى بدء النشاط والثانية تشير إلى نهايته. أما بالنسبة للأسهم فهي تمثل علاقات التتابع بين الأنشطة، وفي هذا التمثيل يمكن التخلص من الأنشطة الوهمية، إلا أن التمثيل بواسطة الأسهم (Activity On Arc) هو الأكثر استخداماً.

وبناء على القواعد السابقة يمكن رسم المخطط الشبكي للمشروع التالي باستخدام طريقة (AON) كما هو مبين في الشكل (4).

مثال (8- 1) يتكون أحد مشاريع بناء نظام معلومات من الأنشطة التالية حسب العلاقات الموضحة أدناه:

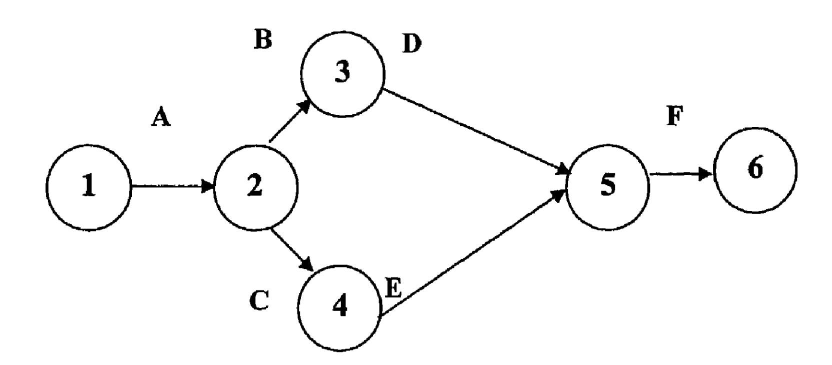
النشاط	الأنشطة السابقة	وقت النشاط (يوم)
A	----	10
B	A	12
C	A	10
D	B	15
E	C	20
F	D, E	8

الشكل (4) المخطط الشبكي لمشروع بناء نظام معلومات باستخدام طريقة (AON)



أيضاً يمكن استخدام طريقة (AOA) في رسم شبكة المشروع كما هو مبين في الشكل (5).

الشكل (5) المخطط الشبكي لمشروع بناء نظام معلومات باستخدام طريقة (AOA)



3.5.8 خطوات تحديد المسار الحرج للمشروع

1. رسم المخطط الشبكي للمشروع وتعيين وقت النشاط على الرسم كما هو مبين في الشكل التالي الذي يمثل النشاط (A).

اسم النشاط ←	A	
زمن النشاط ←	10	

2. تحديد الأزمنة المبكرة لكل نشاط. زمن البداية المبكرة Earliest Start (ES) وزمن النهاية المبكرة Earliest Finish (EF) كما هو مبين في الشكل التالي الذي يمثل النشاط (A).

A	ES	EF
10		

إن وقت البداية المبكرة (ES) للأنشطة الواقعة في بداية المشروع دائماً يساوي صفر، أما وقت النهاية المبكرة لأي نشاط فيساوي وقت البداية المبكرة زائداً وقت النشاط أي أن:

$$EF = ES + t$$

و (t) تمثل زمن أو وقت النشاط.

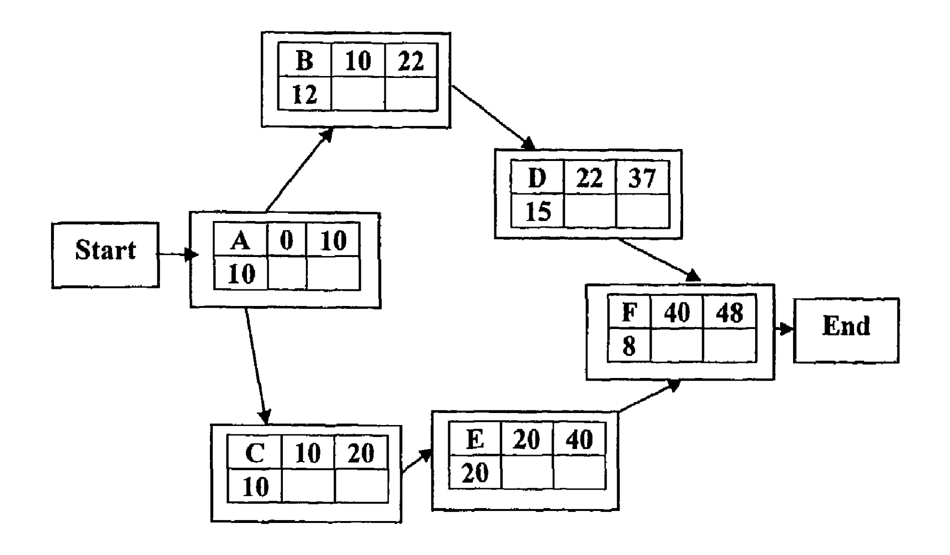
<u>قاعدة تحديد وقت البداية المبكرة (ES)</u>

وقت البداية المبكرة (ES) لأي نشاط غير مستقل أي لا يقع في بداية المشروع يساوي أعلى وقت نهاية مبكرة من بين جميع الأنشطة التي تسبقه مباشرة.

وبتطبيق هذه القاعدة على مشروع بناء نظام معلومات، يظهر لدينا الشكل (6) الذي يبين المخطط الشبكي للمشروع مثبت عليه الأزمنة المبكرة لكل نشاط.

لاحظ من الشكل (6) أن النشاط (F) يسبقه وبشكل مباشر كلا النشاطين (D) و (E)، ووفقاً لقاعدة تحديد وقت البداية المبكرة (ES) فإن وقت البداية المبكرة (ES) للنشاط (F) هو وقت النهاية المبكرة (EF)) للنشاط (E) ويساوي (40)، وذلك لأن وقت النهاية المبكرة للنشاط (E) أعلى من وقت النهاية المبكرة للنشاط (D). إن وقت النهاية المبكرة لآخر نشاط (F) يمثل زمن إنجاز المشروع.

الشكل (6) الأزمنة المبكرة لمشروع بناء نظام معلومات



3. تحديد الأزمنة المتأخرة لكل نشاط (مرحلة الإياب) وقت البداية المتأخر Latest Start (LS) ووقت النهاية المتأخر Latest Finish (LF).

بما أن الزمن الذي يستغرقه إنجاز المشروع هو (48) يوم، يمكننا بدء مرحلة الإياب بحيث يكون وقت النهاية المتأخر (LF) للنشاط (F) هو (48) يوم وبناء على ذلك نستطيع تحديد وقت البداية المتأخر (LS) باستخدام القانون التالي:

$$LS = LF - t$$

لاحظ الشكل التالي الذي يمثل الأزمنة المتأخرة للنشاط (F).

F	40	48
8	40	48
	LS	**LF**

ملاحظة:

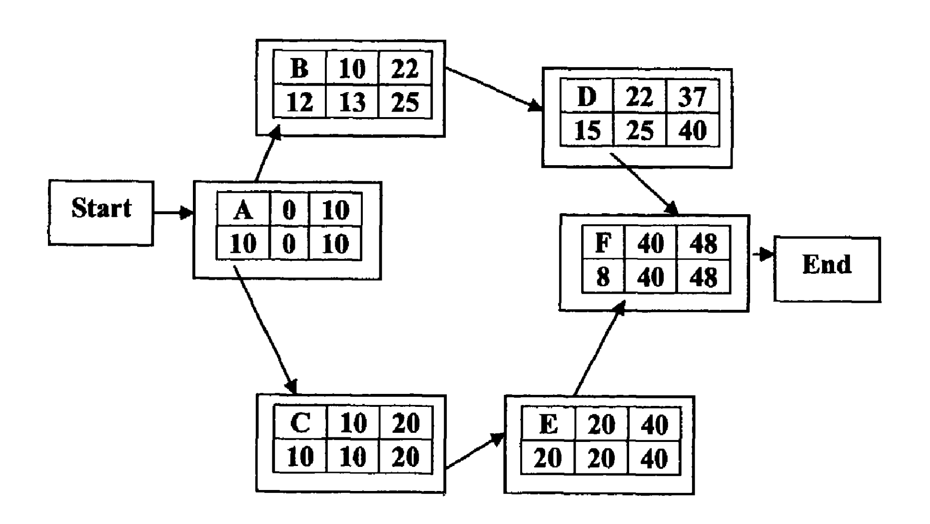
إن الأزمنة المتأخرة للنشاط الأخير تساوي الأزمنة المبكرة المقابلة لها في نفس النشاط، إلا إذا كان المشروع ينتهي بأكثر من نشاط. ويمكن استخدام القاعدة التالية في تحديد وقت النهاية المتأخر لكل نشاط في الشبكة.

قاعدة تحديد وقت النهاية المتأخر (LF)

وقت النهاية المتأخر (LF) لأي نشاط لا يقع في نهاية المشروع يساوي أقل وقت بداية متأخر من بين جميع الأنشطة التي تتبعه مباشرة.

وبتطبيق هذه القاعدة على المثال، يظهر لدينا الشكل (7)، الذي يبين المخطط الشبكي للمشروع مثبت عليه الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة لجميع الأنشطة في المشروع.

الشكل (7) الأزمنة المبكرة والمتأخرة لمشروع بناء نظام معلومات



بعد تحديد الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة لجميع أنشطة المشروع ذهاباً (Forward) وغياباً (Backward)، يمكننا تحديد الزمن الراكد (Slack)

المرافق لكل نشاط في المشروع. ويعرف الزمن الراكد أو الفائض لنشاط معين بأنه أكبر وقت يمكن فيه تأخير تنفيذ ذلك النشاط دون التأثير على الزمن الكلي لتنفيذ المشروع. إن الزمن الراكد أو الفائض الكلي لأي نشاط يكون متمثلاً بالفترة الفاصلة بين الوقت المبكر لبدء النشاط والوقت المتأخر لانتهائه مطروحاً منه فترة التنفيذ ويمكن إيجاد الوقت الراكد (الفائض) باستخدام العلاقة التالية:

Slack = LS – ES = LF - EF

واستناداً إلى العلاقة السابقة، فإن الزمن الراكد المرافق للنشاط (A) يساوي:

Slack A = LS – ES = LF – EF

= 0 – 0 = 10 -10 = 0

وللنشاط (B)

Slack B = LS – ES = LF – EF

= 13 – 10 = 25 -22 = 3

وهذا يعني أنه يمكن تأخير تنفيذ النشاط (B) ثلاثة أيام بينما لا يمكننا تأخير تنفيذ النشاط (A) وهذا يعني بأن النشاط (A) هو نشاط حرج. بشكل عام الأنشطة الحرجة هي الأنشطة التي قيمة الزمن الراكد عندها تساوي صفر.

والجدول التالي يبين الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة والزمن الراكد (الفائض) عند كل نشاط من أنشطة المشروع.

النشاط	ES	LS	EF	LF	Slack	حرج؟
A	0	0	10	10	0	نعم
B	10	13	22	25	3	لا
C	10	10	20	20	0	نعم
D	25	22	40	37	3	لا
E	20	20	40	40	0	نعم
F	40	40	48	48	0	نعم

لاحظ عمود الوقت الراكد (الفائض Slack) في الجدول. يظهر بأن الأنشطة (A) و (C) و (E) و (F) لا تحتمل التأخير، حيث أن قيمة الوقت الراكد عندها

تساوي صفر. لذلك تعتبر الأنشطة الحرجة للمشروع. والمسار الحرج يتشكل منها أي أن المسار الحرج هو: A – C – E – F، كما أن طول هذا المسار هو: 48 يوم. ويمكن إيجاد المسار الحرج عن طريق رصد جميع المسارات في الشبكة وحساب طول كل مسار، فيكون المسار الحرج أطول مسار في الشبكة.

6.8 طريقة تقويم ومراجعة البرامج PERT

البرنامج هو مجموعة من المهام أو الأنشطة أو الفعاليات Activities المطلوب تنفيذها وفقاً لجدول زمني واضح ومحدد، ولا بد من توفير الموارد المختلفة وفق جدول زمني واضح لتنفيذ ما هو مطلوب، وهذا يحتاج إلى استخدام شبكات الأعمال Networks لتحقيق الاستخدام الأفضل للموارد المادية والزمن، حيث أن لهما تأثير واضح في تكاليف المشروع، حيث تعمل شبكات الأعمال على خفض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن وصولاً إلى حالة الأمثلية.

إن هذا الأسلوب مكرس لأغراض الرقابة على تخطيط ومتابعة تنفيذ البرامج أو المشاريع، ويرتبط بشكل وثيق بأسلوب المسار الحرج، إلا أن أسلوب PERT يعتمد على الأوقات الاحتمالية لتنفيذ الأنشطة المختلفة وذلك استجابةً لعوامل البيئة الخارجية الخارجة عن نطاق سيطرة المنظمة ومن أهمها: القوى الاقتصادية، والأنظمة القانونية والسياسية، والعوامل البيئية، والبيئة الاجتماعية، والعوامل التكنولوجية. وعوامل البيئة الداخلية النابعة من داخل المنظمة المنفذة للمشروع والتي يمكن السيطرة عليها مثل: توفير الموارد البشرية، والمالية، والمادية (مكائن ومعدات) المطلوبة في الزمان والمكان المناسب.

استناداً إلى ما تقدم من عوامل خارجية وداخلية فإن متخذ القرار المسؤول عن تنفيذ المشروع سوف يأخذ بعين الاعتبار هذه العوامل عند حساب الأزمنة اللازمة لتنفيذ الأنشطة التي يتكون منها المشروع، حيث يتم الاعتماد في هذه الحالة على ثلاثة أنواع من الأزمنة، هي:

أ. الزمن التفاؤلي Optimistic Time (a): وهو ذلك الزمن الذي يتم اعتماده إذا كانت كافة الظروف البيئية تسير في مصلحة تنفيذ المشروع، لذلك يكون عادة قليل ومحدد.

ب. الزمن الأكثر إحتمالاً Most Likely Time (m): هو ذلك الزمن الذي يتم اعتماده إذا كان لدى إدارة المشروع الخبرات الكافية بحث تكون الأوقات المحسوبة هي أقرب إلى الواقع الفعلي، ويكون هذا الزمن أكثر من الزمن التفاؤلي.

ت. الزمن التشاؤمي Pessimistic Time (b): وهو ذلك الزمن الذي يتم اعتماده إذا كانت كافة الظروف البيئية لا تسير في مصلحة تنفيذ المشروع، لذلك يكون عادة أكبر من الأزمنة السابقة.

إن وجود ثلاثة أزمنة (a, m, b) لكل نشاط يربك الحسابات الزمنية للمشروع، لذالك يتم تحديد الوقت المتوقع لتنفيذ ذلك النشاط وفق الصيغة التالية:

$$t = \frac{a + 4(m) + b}{6}$$

حيث:

t: الوقت المتوقع للنشاط.

a: الزمن التفاؤلي بوزن 1.

m: الزمن الأكثر احتمالا بوزن 4.

b: الزمن التشاؤمي بوزن 1.

6: مجموع الأوزان

مع وجود حالة عدم التأكد في أزمنة النشاط، يمكننا استخدام التباين لوصف التشتت أو التباين في قيم زمن النشاط. لحساب تباين زمن النشاط نستخدم الصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

والفرق بين الزمن التشاؤمي (b) والزمن التفاؤلي (a) يؤثر وبشكل كبير على قيمة التباين. الفرق الكبير بين هاتين القيمتين يعكس درجة عالية من حالة عدم التأكد في زمن النشاط.

بالإضافة إلى ذلك يستعين متخذ القرار بمؤشرات إحصائية تمكنه من الإطلاع على سير عمليات تنفيذ الأنشطة والتعرف إلى الطبيعة التفاؤلية أو التشاؤمية لأزمنة الأنشطة في المشروع. لوحظ من خلال التعامل مع الأزمنة الإحتمالية للأنشطة الواردة ضمن شبكة PERT أنها تخضع لتوزيع بيتا الاحتمالي Beta Distribution.

ولتوضيح آلية عمل طريقة بيرت نستخدم المثال التالي الخاص بمشروع تطوير نظام معلومات.

مثال (8- 2) يتطلب مشروع تطوير نظام معلومات ستة أنشطة رئيسة، الجدول التالي يبين الأزمنة التقديرية (بالأيام) لإنجاز المشروع.

النشاط	الأنشطة السابقة	a	m	b
A	----	9	4	11
B	A	6	7	14
C	B	2	6	10
D	A	0.5	1	1.5
E	D	6	9	12
F	C, E	4	5	12

لحساب الزمن المتوقع (المتوسط) لكل نشاط نستخدم الصيغة (1)، فيكون الزمن المتوقع (المتوسط) لأنشطة المشروع على النحو الأتي:

$$t_a = \frac{9+4(4)+11}{6} = 6$$

$$t_b = \frac{6+4(7)+14}{6} = 8$$

$$t_c = \frac{2+4(6)+10}{6} = 6$$

$$t_d = \frac{0.5+4(1)+1.5}{6} = 1$$

$$t_e = \frac{6+4(9)+12}{6} = 9$$

$$t_f = \frac{4+4(5)+12}{6} = 6$$

أما التباين لكل نشاط فيتم حسابه باستخدام الصيغة (2)، وعلى النحو الأتي:

$$\sigma^2 a = \left(\frac{11-9}{6}\right)^2 = 0:11$$

$$\sigma^2 b = \left(\frac{14-6}{6}\right)^2 = 1.78$$

$$\sigma^2 c = \left(\frac{10-2}{6}\right)^2 = 1.78$$

$$\sigma^2 d = \left(\frac{1.5-0.5}{6}\right)^2 = 0.03$$

$$\sigma^2 e = \left(\frac{12-6}{6}\right)^2 = 1$$

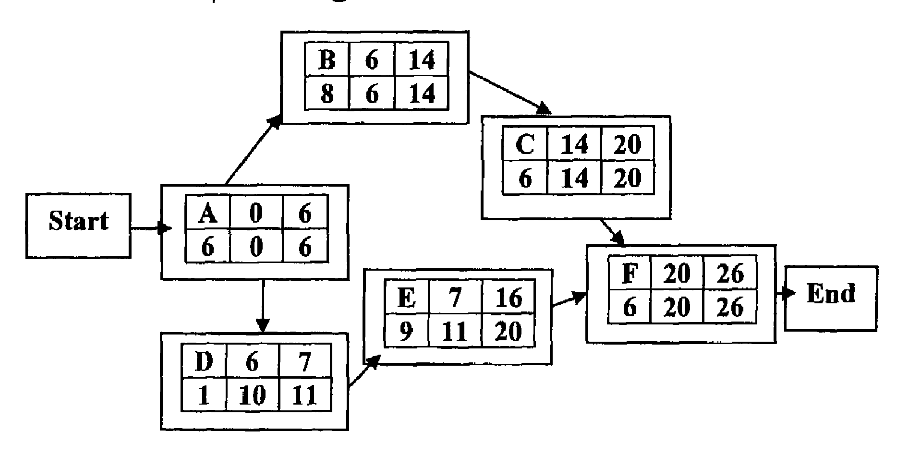
$$\sigma^2 f = \left(\frac{12-4}{6}\right)^2 = 1.78$$

والجدول التالي يبين متوسط الزمن والتباين لكل نشاط من أنشطة المشروع

النشاط	E(t)	σ^2
A	6	0.11
B	7	1.78
C	6	1.78
D	1	0.03
E	9	1
F	6	1.78

وبناءاً على ما تقدم نستطيع ايجاد المسار الحرج حسب الطريقة التي تمت الإشارة إليها سابقاً، وكما هو مبين في الشكل الآتي:

الشكل (8) الأزمنة المبكرة والمتأخرة لمشروع تطوير نظام معلومات



والجدول التالي يبين الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة والزمن الراكد (الفائض) عند كل نشاط من أنشطة المشروع.

النشاط	ES	LS	EF	LF	Slack	حرج؟
A	0	0	6	6	0	نعم
B	6	6	14	14	0	نعم
C	14	14	20	20	0	نعم
D	6	10	7	11	4	لا
E	7	11	16	20	4	لا
F	20	20	26	26	0	نعم

لاحظ عمود الوقت الراكد (الفائض Slack) في الجدول. يظهر بأن الأنشطة (A) و (B) و (C) و (F) لا تحتمل التأخير، حيث أن قيمة الوقت الراكد عندها تساوي صفر. لذلك تعتبر الأنشطة الحرجة للمشروع. والمسار الحرج يتشكل منها أي أن المسار الحرج هو: A-B-C-F كما أن طول هذا المسار هو: 25، يوم، ويمثل طول المسار الزمن المتوقع لإكمال المشروع، أما تباين المشروع فيمثل مجموع تباينات الأنشطة الحرجة، لذلك فإن تباين الزمن المتوقع لإكمال المشروع هو:

$$\sigma^2 = \sigma^2 a + \sigma^2 b + \sigma^2 c + \sigma^2 f$$

$$= 0.11 + 1.78 + 1.78 + 1.78 = 5.45$$

أما الانحراف المعياري للزمن المتوقع لإكمال المشروع هو:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5.45} = 2.33$$

بافتراض بأن زمن إكمال المشروع (T) يخضع لتوزيع طبيعي، نستطيع حساب احتمالية إنجاز المشروع في وقت محدد. مثلاً إفترض أن إدارة الشركة خصصت 30 يوم لإنجاز المشروع، ما هي احتمالية تسليم المشروع في 30 يوم؟ إن هذا يعني إيجاد احتمالية أن $T \leq 30$، وبإيجاد العلامة المعيارية Z للتوزيع الطبيعي عند $T = 30$ نستخدم الصيغة التالية:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

حيث:

X: الوقت المستهدف لزمن المشروع.

μ: وقت المسار الحرج (زمن المشروع).

σ: الانحراف المعياري لوقت المشروع.

أي أن:

$$\text{العلامة المعيارية } Z = \frac{\text{الوقت المستهدف لزمن المشروع – وقت المسار الحرج}}{\text{الانحراف المعياري لوقت المشروع}}$$

وعليه فإن العلامة المعيارية عند T = 30 هي:

$$Z = \frac{30 - 26}{2.33} = 1.72$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي نجد المساحة المقابلة لقيمة Z = 1.72، فنجد أن احتمالية إكمال المشروع في 30 يوم أو أقل هي 0.9572، أي 95.72%. الآن افترض بأن الشركة صاحبة المشروع طلبت من إدارة المشروع إكمال المشروع خلال 23 يوم، ما هي احتمالية تسليم المشروع في 23 يوم؟ نجد قيمة Z للتوزيع الطبيعي عند T =23 نستخدم الصيغة السابقة، كما يأتي:

$$Z = \frac{23 - 26}{2.33} = -1.29$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد المساحة المقابلة لقيمة Z = -1.29، فنجد أن احتمالية إكمال المشروع في 23 يوم أو أقل هي 0.098، أي 9.85%.

تدريب (1): ما هو احتمال تنفيذ المشروع وفقاً لوقت المسار الحرج؟ الإجابة (50%).

تدريب (2): ما هو احتمال تنفيذ المشروع بتكلفة مقدارها 8400، إذا كانت تكلفة اليوم الواحد تساوي 300 دينار؟ الإجابة: (80.51%).

إن عملية إيجاد احتمال تنفيذ المشروع في وقت معين تتضمن القيام بالخطوات التالية:

1. تحديد أنشطة المسار الحرج، وحساب الانحراف المعياري لكل نشاط من أنشطة المسار الحرج.
2. حساب الانحراف المعياري لوقت المشروع ككل.
3. حساب العلامة المعيارية Z حسب الصيغة التالية: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
4. من جدول التوزيع الطبيعي نبحث عن المساحة المقابلة للعلامة المعيارية Z.

7.8 نموذج بيرت التكلفة: العلاقة المتبادلة بين الوقت والتكلفة

حتى هذه النقطة تم توضيح استخدام تحليل كلا من طريقة المسار الحرج، وطريقة بيرت PERT، اللتان تقدمان معلومات هامة تستخدمها إدارة المشروع في التخطيط للمشروع. لكن كثيراً ما تواجه إدارة المشروع مشاكل تتعلق بوقت تسليم المشروع من حيث تعجيل وقت تنفيذ المشروع وتسليمه في وقت أقل من الوقت الذي أظهرته نتائج تحليل شبكة المسار الحرج و بيرت PERT.

يستطيع مدير المشروع أن يخفض فترة إنجاز المشروع عن طريق تخصيص موارد إضافية (مواد أولية، عمال، آلات، ...) لإنجاز أنشطة المشروع ويترتب عن ذلك تكاليف إضافية تؤثر في مجمل تكاليف المشروع. لذلك فإن قرار تخفيض فترة إنجاز المشروع يجب أن يبنى على التحليل المتبادل بين الوقت والتكلفة، حيث تعد تكلفة المشروع من العوامل الرئيسة في التخطيط للمشروع. حيث توجد علاقة كبيرة بين الوقت اللازم لإتمام المشروع، وتكلفة تنفيذه، فكلما حاولت إدارة المشروع تخفيض الوقت كلما زادت التكلفة.

إن تعجيل أو تسريع المشروع Project Crashing هي طريقة لتقصير فترة إنجاز المشروع عن طريق تقليل وقت نشاط أو أكثر من أنشطة المسار الحرج إلى وقت أقل من الوقت العادي للنشاط. ويسمى التخفيض من الأوقات العادية للنشاط بالتعجيل أو

التسريع Crashing، الذي يتحقق عند استخدام موارد إضافية أكثر تقاس من حيث تكلفة تعجيل النشاط.

يمكن تحديد نوعين من الوقت والتكلفة لكل نشاط، وهما:

أ. الوقت العادي Normal Time، والتكلفة العادية Normal Cost.

ب. وقت التعجيل (التسريع) Crash Time، وتكلفة التعجيل (التسريع) Crash Cost.

ومن خلال الوقت والتكلفة نقوم بحساب ميل تكلفة النشاط (تكلفة التعجيل لكل فترة من الوقت) لجميع الأنشطة باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{Crash cost/ time period} = \frac{Crash\ Cost - Normal\ Cost}{Normal\ Time - Crash\ Time}$$

أي أن حاصل قسمة الفرق في التكاليف على الفرق في الأوقات يعطينا ميل تكلفة النشاط.

يهدف نموذج بيرت PERT التكلفة إلى تحديد البدائل الممكنة لتخفيض وقت المشروع وما يقابلها من تكاليف، واختيار أفضل البدائل من خلال تطبيق الخطوات التالية:

1. رسم شبكة الأعمال.
2. إيجاد المسار الحرج وتحديد الأنشطة الحرجة.
3. تحديد التخفيضات الممكنة لكل نشاط وما يقابلها من زيادة في التكلفة.
4. تحديد حدود فترة التخفيض لكل نشاط عن طريق إيجاد الفرق بين الوقت العادي ووقت التعجيل.
5. حساب ميل التكلفة لكل نشاط.
6. البدء بتخفيض أنشطة المسار الحرج، ويتم البدء بتخفيض وقت النشاط ذو أقل ميل تكلفة ثم الذي يليه وهكذا، مع مراعاة حدود فترة التخفيض لكل نشاط.

7. في حالة احتمال تحول المسار الحرج وظهور مسارات حرجة جديدة يجب مراعاة القاعدة التالية:

يتم أولاً تخفيض النشاط الحرج ذو أقل ميل تكلفة في حدود فترة التخفيض، أو أقل وقت فائض (Slack) للأنشطة غير الحرجة أيهما أقل.

8. في حالة ظهور أكثر من مسار حرج يجب تخفيض وقت المسارات الحرجة، حيث يتم اختيار النشاط الحرج ذو أقل ميل تكلفة في كل مسار، ويتم تخفيض هذه الأنشطة في حدود أقل فترة تخفيض مسموح بها.

9. يتم تفضيل النشاط المشترك في أولويات التخفيض إذا كان ميل التكلفة له أقل من مجموع ميل التكلفة لنشاطين كل منهما في مسار حرج مختلف. وملاحظة أن تخفيض النشاط المشترك لن يوجد مسارات جديدة.

10. يتم تخفيض وقت المشروع باستخدام الخطوات السابقة حتى يتم الوصول إلى الوقت المستهدف.

لتوضيح آلية عمل تعجيل المشروع نستخدم مثال مشروع تطوير نظام معلومات، والجدول التالي يبين الأوقات والتكاليف العادية والمعجلة لكل نشاط من أنشطة المشروع:

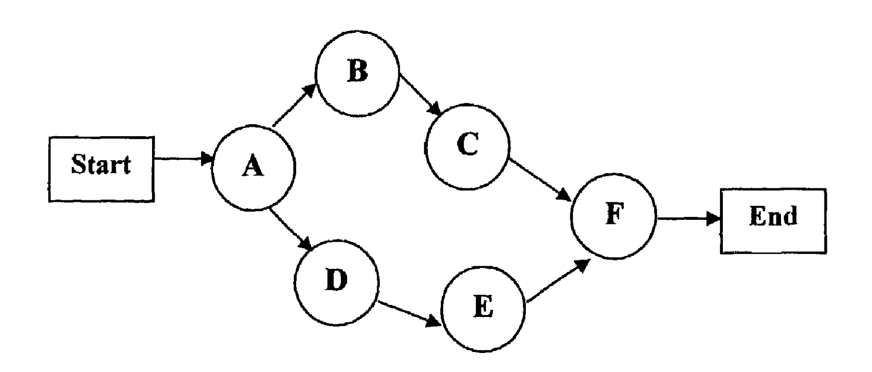
النشاط	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost	ميل التكلفة
A	6	5	2800	2950	150
B	7	6	3200	3275	75
C	6	4	2200	2300	50
D	1	1	5000	5000	0
E	9	7	5800	6000	100
F	6	4	8200	8800	300
المجموع	35	27	27200	28325	

يمثل العمود الأخير من الجدول ميل التكلفة لكل نشاط Activity Crash Cost الذي تم حسابه باستخدام الصيغة المشار إليها أعلاه، على سبيل المثال ميل التكلفة للنشاط a هو:

$$\text{Activity (a) Cost Slop} = \frac{2800-2950}{6-5} = \frac{150}{1} = 150$$

وفيما يلي شبكة الأعمال الممثلة للمشروع:

الشكل (8) شبكة الأعمال لمشروع تطوير نظام معلومات



المطلوب: تخفيض وقت المشروع إلى المدة المثلى، وتحديد زمن الإنجاز الأمثل إذا علمت أن المنظمة صاحبة المشروع تدفع (100) دينار حوافز عن كل يوم يتم تعجيله في العمل، حيث كانت التكاليف غير المباشرة عند البدء في تنفيذ المشروع (1000) دينار.

الحل

في البداية يتم رسم المخطط الشبكي للمشروع وتحديد المسار الحرج، من الحسابات السابقة تبين أن المسار الحرج هو: A-B-C-F، وطوله (25) يوم.

وفيما يلي المسارات الموجودة في شبكة الأعمال، مع المسار الحرج:

A-B-C-F = 25 day

A-D-E-F = 22 day

يتم البدء بتخفيض وقت النشاط (C) ذو أقل ميل تكلفة يومين (حدود فترة التخفيض) فيصبح طول المسار الحرج (23) يوم، ثم نقوم بتخفيض وقت النشاط (B) يوم، فيصبح طول المسار (22) يوم، فيصبح هنالك مسارين حرجين طول كل منهما (22) يوم:

A-B-C-F = 22 day

A-D-E-F = 22 day

لاحظ أن المسارين يشتركان في الأنشطة A، وF، فيتم تخفيض النشاط A ذو أقل ميل تكلفة يوم واحد (حدود فترة التخفيض) فيصبح طول كل مسار حرج (21) يوم، ثم نقوم بتخفيض وقت النشاط (F) يوم، فيصبح طول كل مسار حرج (20) يوم، وهو آخر يوم مسموح به، حيث تبدأ بعد ذلك التكاليف في الزيادة.

والجدول التالي يبين سلوك التكاليف المباشرة وغير المباشرة والتكاليف الكلية بالقياس إلى التعجيل الزمني الواقع بين المدة 25 يوم إلى 20 يوم.

زمن المشروع / التكاليف	25	24	23	22	21	20
التكاليف المباشرة	27200	27250	27300	27375	27525	27775
التكاليف غير المباشرة	1000	900	800	700	600	500
التكاليف الكلية	28200	28250	28100	28075	28125	28275

من الجدول السابق نلاحظ أن التكاليف الكلية (المباشرة وغير المباشرة) تكون أقل ما يمكن عند المدة 22 يوم.

مثال (8- 3): كانت البيانات الخاصة بأحد المشاريع (الوقت بالأسبوع) كما هو مبين في الجدول الأتي:

		Normal عادي		Crash معجل		
النشاط	الأسبقية	Time	Cost	Time	Cost	ميل التكلفة
A	-	12	8000	8	12000	1000
B	-	14	5000	10	7500	625
C	-	8	10000	8	10000	0
D	A	5	6000	3	8000	1000
E	A	4	5000	3	7000	2000
F	B, C, E	6	9000	5	12000	3000
G	C	10	5000	8	8000	1500

المطلوب:

تخفيض وقت المشروع إلى (17) أسبوع، وإيجاد مقدار التكلفة الإجمالية للمشروع بعد التعجيل.

1. رسم شبكة الأعمال، وإيجاد المسار الحرج وتحديد الأنشطة الحرجة.

يبين الشكل التالي المخطط الشبكي للمشروع، ويتضح من الشكل أن المسارات هي:

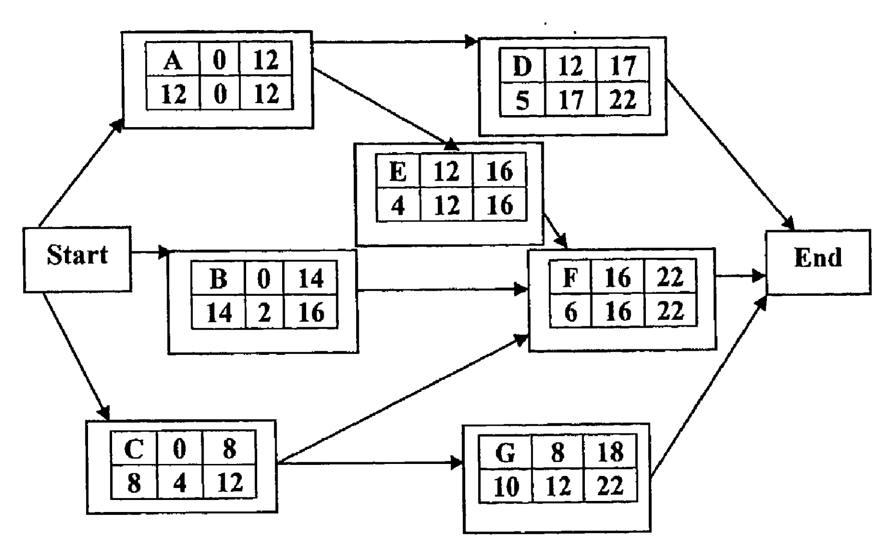
A-E-F = 22 Week

A-D = 17 Week

B-F = 20 Week

C-G = 18 Week

فيكون وقت إتمام المشروع يساوي 22 أسبوع والأنشطة الحرجة هي A، E، وF.



2. تحديد التخفيضات الممكنة لكل نشاط وما يقابلها من زيادة في التكلفة.

النشاط	حدود التخفيض	ميل التكلفة
A	$12-8=4$	$S_A=\frac{12000-8000}{12-8}=\frac{4000}{4}=1000$
B	$14-10=4$	$S_B=\frac{7500-5000}{14-10}=\frac{2500}{4}=625$
C	$8-8=0$	$S_C=\frac{10000-10000}{8-8}=0$
D	$5-3=2$	$S_D=\frac{8000-6000}{5-3}=\frac{2000}{2}=1000$
E	$4-3=1$	$S_I=\frac{7000-5000}{4-3}=\frac{2000}{1}=2000$
F	$6-5=1$	$S_1=\frac{12000-9000}{6-5}=\frac{3000}{1}=3000$
G	$10-8=2$	$S_G=\frac{8000-5000}{10-8}=\frac{3000}{2}=1500$

3. نجري عملية التعجيل، يتم البدء بتخفيض وقت النشاط (A) ذو أقل ميل تكلفة أربعة أسابيع (حدود فترة التخفيض) فيصبح طول المسار الأول (18) أسبوع، فيتحول المسار الثالث (B-F) إلى حرج وطوله (20) أسبوع، نقوم بتخفيض النشاط (B) ثلاثة أسابيع، فيصبح هنالك مسارين حرجين هما الأول والرابع، طول كل مسار (18) أسبوع فتصبح المسارات على النحو الأتي:

A-E-F = 18 Week

A-D = 13 Week

B-F = 17 Week

C-G = 18 Week

بما أن هنالك مسارين بنفس المدة (18) أسبوع نقوم بتعجيل النشاط ذو أقل ميل تكلفة في كلا المسارين، فيكون النشاط (E) في المسار الأول الذي يتم تعجيله أسبوع واحد، والنشاط (G) في المسار الثاني الذي يتم تعجيله بأسبوع واحد، فتصبح المسارات على النحو الأتي:

A-E-F = 17 Week

A-D = 13 Week

B-F = 17 Week

C-G = 17 Week

وبالتالي يصبح هنالك ثلاثة مسارات حرجة مدة كل منها (17) أسبوع، وبلغ مجموع تكاليف التعجيل 9375 دينار، كانت موزعة على النحو الأتي:

تعجيل النشاط A أربعة أسابيع، (1000) دينار في الأسبوع = (4) × (1000) = 4000 دينار.

تعجيل النشاط B ثلاثة أسابيع، (625) دينار في الأسبوع = (3) × (625) = 1875 دينار.

تعجيل النشاط E أسبوع واحد، (2000) دينار في الأسبوع = (1) × (2000) = 2000 دينار.

تعجيل النشاط G أسبوع واحد، (1500) دينار في الأسبوع = (1) × (1500) = 1500 دينار.

المجموع = 4000 + 1875 + 2000 + 1500 = 9375 دينار.

فتصبح التكلفة الإجمالية للمشروع بعد عملية التعجيل = 132000 + 9375 = 141375 دينار

8.8 صياغة نموذج البرمجة الخطية لشبكات الأعمال

لصياغة نموذج البرمجة الخطية الممثل لشبكات الأعمال، سوف نعتمد على المخطط الشبكي للمشروع باستخدام طريقة النشاط على السهم (AOA)، حيث سنستخدم الوقت المبكر لكل حدث، لذلك فإن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية الخاص بشبكات الأعمال هي على النحو الأتي:

$$\text{Minimize } Z = \sum_i X_i$$

Subject to:

$X_j - X_i \geq t_{ij}$, for all activities $i \rightarrow j$

$X_i, X_j \geq 0$

حيث:

X_i: الوقت المبكر للحدث (i).

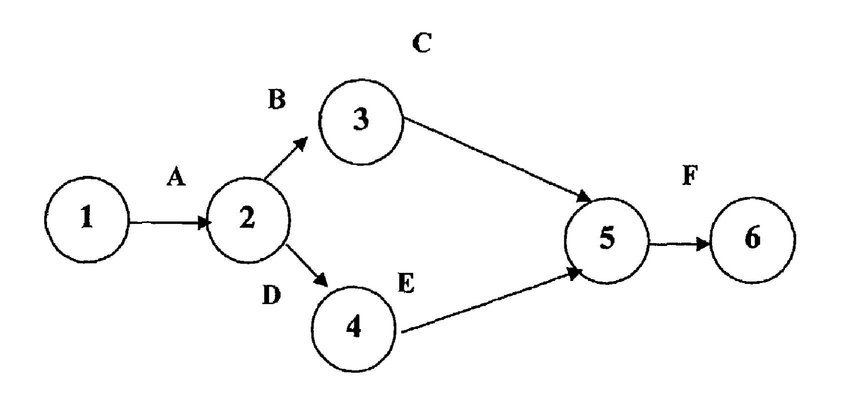
X_j: الوقت المبكر للحدث (j).

t_{ij}: وقت النشاط $i \rightarrow j$

لنأخذ مثال مشروع بناء نظام معلومات، حيث كان المخطط الشبكي للمشروع باستخدام طريقة النشاط على السهم (AOA)، على النحو الأتي

النشاط	الحدث	وقت النشاط (يوم)
A	$1 \rightarrow 2$	6
B	$2 \rightarrow 3$	7
C	$3 \rightarrow 5$	6
D	$2 \rightarrow 4$	1
E	$4 \rightarrow 5$	9
F	$5 \rightarrow 6$	6

الشكل (9) المخطط الشبكي لمشروع تطوير نظام معلومات باستخدام طريقة (AOA)



إن نموذج البرمجة الخطية لشبكة الأعمال في الشكل (8) هو:

Minimize $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

Subject to:

$X_2 - X_1 \geq 6$

$X_3 - X_2 \geq 7$

$X_5 - X_3 \geq 6$

$X_4 - X_2 \geq 1$

$X_5 - X_4 \geq 9$

$X_6 - X_5 \geq 6$

$X_i, X_j \geq 0$

9.8 صياغة نموذج البرمجة الخطية لتعجيل المشروع

يختلف نموذج البرمجة الخطية الخاص بتعجيل المشروع عن نموذج البرمجة الخطية الخاص بشبكة الأعمال، إذ يعد نموذج البرمجة الخطية الخاص بتعجيل المشروع أطول وأكثر تعقيد.

الهدف من نموذج البرمجة الخطية الخاص بتعجيل المشروع هو تقليل تكلفة التعجيل، إذا ما أعطيت حدود التعجيل (التخفيض) لكل نشاط. كنتيجة لذلك فإن صياغة النموذج العام للبرمجة الخطية يجب توسعتها لتتضمن تكلفة ووقت التعجيل. سنستمر في تعريف أزمنة الحدث المبكرة للنشاط $i \rightarrow j$ بأنها $\mathbf{X_i}$، و$\mathbf{X_j}$ ، كما زمن التعجيل للنشاط $i \rightarrow j$ بالمتغير $\mathbf{Y_{ij}}$. لذلك فإنه يمكن تعريف متغيرات القرار على النحو الآتي:

$\mathbf{X_i}$: الوقت المبكر للحدث (i).

$\mathbf{X_j}$: الوقت المبكر للحدث (j).

$\mathbf{Y_{ij}}$: وقت التعجيل (التخفيض) المتاح للنشاط $i \rightarrow j$.

الهدف من تعجيل المشروع هو تخفيض فترة المشروع إلى أقل تكلفة تعجيل ممكنة. وبتطبيق ذلك على مثال مشروع تطوير نظام معلومات، تكتب دالة الهدف على النحو الآتي:

$$\text{Minimize } Z = 150\,Y_{12} + 75\,Y_{23} + 50\,Y_{24} + 0\,Y_{35} + 100\,Y_{45} + 300\,Y_{56}$$

إن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف هي ميل التكلفة لكل نشاط. أما القيود فهي على النحو الآتي:

$$Y_{12} \leq 1$$
$$Y_{23} \leq 1$$
$$Y_{24} \leq 2$$
$$Y_{35} \leq 0$$
$$Y_{45} \leq 2$$
$$Y_{56} \leq 2$$

على سبيل المثال، القيد الأول يشير إلى أن فترة تعجيل النشاط $2 \rightarrow 1$ لا يمكن أن تتجاوز يوم واحد.

المجموعة الثانية من القيود يجب أن تعبر رياضياً عن العلاقة بين أزمنة الحدث المبكرة لكل نشاط في شبكة الأعمال، أي يجب أن نعكس حقيقة أزمنة النشاط يمكن تعجيلها بالمقدار Y_{ij}. عودة إلى قيد النشاط $2 \rightarrow 1$ في الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية لشبكة الأعمال، حيث كان على النحو الأتي:

$$X_2 - X_1 \geq 6$$

ويمكن إعادة صياغة القيد على النحو الأتي:

$$X_1 + 6 \leq X_2$$

ويشير هذا إلى أن الوقت المبكر للحدث الأول X_1، زائداً الوقت العادي للنشاط لا يمكن أن تتجاوز الوقت المبكر للحدث الثاني X_2. لعكس حقيقة أنه يمكن تعجيل النشاط، من الضروري أن نقوم فقط بطرح حد التعجيل من الطرف الأيسر للقيد المعادة صياغته، وعلى النحو الأتي

$$X_1 + 6 - Y_{12} \leq X_2$$

إن القيد المعدل هذا يشر إلى أن الوقت المبكر للحدث الثاني (X_2) تم تحديده ليس فقط من خلال الوقت المبكر للحدث الأول X_1، زائداً الوقت العادي للنشاط، لكن أيضا من خلال حد التعجيل. وبتطبيق ذلك على أنشطة شبكة الأعمال، نحصل على الأتي:

$$X_2 + 6 - Y_{23} \leq X_3$$
$$X_3 + 7 - Y_{35} \leq X_5$$
$$X_2 + 6 - Y_{24} \leq X_4$$
$$X_4 + 1 - Y_{45} \leq X_5$$
$$X_5 + 9 - Y_{56} \leq X_6$$

أخيراً، يجب الإشارة إلى فترة المشروع المطلوب الوصل إليها بعد عملية التعجيل. افترض بأن الشركة ترغب في تسريع المشروع من 25 يوم إلى 22 يوم، يشير القيد الذي يحدد الوقت المبكر للحدث الأخير إلى أن الوقت المبكر للحدث الأخير لا يمكن أن يتجاوز 22 يوم، ويتم التعبير عن ذلك على النحو الأتي:

$X_6 \leq 22$

وفيما يلي الصياغة الكاملة لنموذج البرمجة الخطية الخاص بتعجيل المشروع:

Minimize $Z = 150\ Y_{12} + 75\ Y_{23} + 50\ Y_{24} + 0\ Y_{35} + 100\ Y_{45} + 300\ Y_{56}$

Subject to:

$Y_{12} \leq 1$

$Y_{23} \leq 1$

$Y_{24} \leq 2$

$Y_{35} \leq 0$

$Y_{45} \leq 2$

$Y_{56} \leq 2$

$Y_{12} + X_2 - X_1 \geq 6$

$Y_{23} + X_3 - X_2 \geq 7$

$Y_{35} + X_5 - X_3 \geq 6$

$Y_{24} + X_4 - X_2 \geq 1$

$Y_{45} + X_5 - X_4 \geq 9$

$Y_{56} + X_6 - X_5 \geq 6$

$X_6 \leq 22$

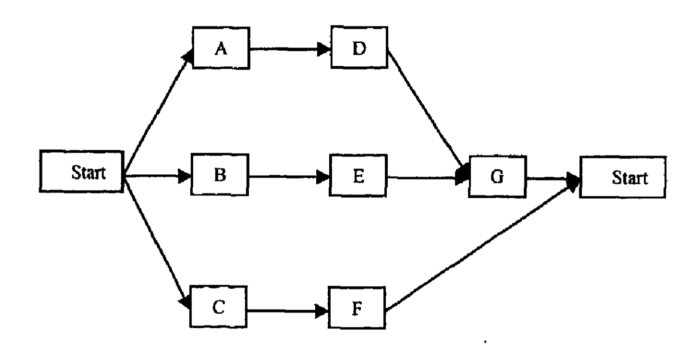
$X_i, Y_{ij} \geq 0$

ولحل هذا النموذج نحتاج إلى استخدام الحاسوب، ويوجد العديد من البرمجيات الجاهزة التي يمكن الاستعانة بها لحل مثل هذه النماذج المعقدة.

10.8 تمارين محلولة

1. يتطلب تطوير منتج سبعة أنشطة رئيسة، الجدول التالي يبين الأزمنة التقديرية (بالأيام) لإنجاز المشروع، و يبين الشكل التالي المخطط الشبكي للمشروع، أجب عن الأسئلة: 1- 6

Activity	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost
A	4	3	2000	2600
B	2	1	2200	2800
C	3	3	500	500
D	8	4	2300	2600
E	6	3	900	1200
F	3	2	3000	4200
G	4	2	1400	2000



1. أنشطة المسار الحرج هي: **A-D-G**
2. الزمن المتوقع لإنجاز المشروع يساوي: **16** يوم
3. ما هو مجموع تكاليف إكمال المشروع في الوقت العادي له: **12300**
4. إذا أردنا تخفيض زمن المشروع يوم واحد فقط، ما هي الأنشطة التي سيتم تعجيلها: **D**
5. ما مقدار ميل التكلفة للنشاط **A**: **600**
6. ما هو أقصى مقدار ممكن لتخفيض زمن النشاط **E**: **3** أيام

11.8 تمارين الفصل الثامن

1. الجدول التالي يبن مجموعة الأنشطة التي تمثل أحد المشاريع الخدمية

النشاط	النشاط السابق
A	-
B	-
C	A
D	B
E	B
F	C, D
G	E
H	F, G

المطلوب: رسم شبكة الأعمال باستخدام طريقة النشاط على السهم AOA

2. أرسم شبكة الأعمال التي تمثل أحد المشاريع المبين أنشطته في الجدول التالي باستخدام طريقة النشاط على الدائرة AON.

النشاط	الأسبقية
A	-
B	A
C	A
D	B
E	B
F	C, E
G	A, D
H	F
I	F
J	G, H, I

3. يتكون مشروع تطوير أحد الأنظمة الإلكترونية البسيطة من خمسة أنشطة رئيسه، تم تقدير الوقت (بالساعة) عند كل نشاط كما هو مبين في الجدول التالي:

Activity	Immediate Predecessor	a	m	b
A	-	2	5	8
B	-	3	6	9
C	A	4	7	10
D	B	2	5	14
E	C	3	3	3

المطلوب حساب:

أ. متوسط الوقت لكل نشاط.

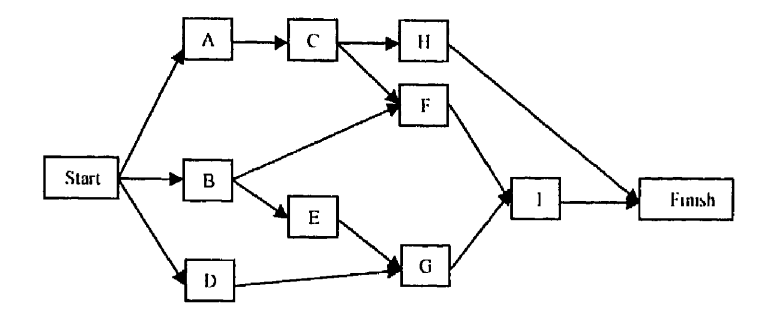
ب. التباين لكل نشاط.

ج. الزمن المتوقع لإكمال المشروع.

د. الانحراف المعياري للمشروع.

4. يقوم أحد الباحثين في مجال إدارة الأعمال بإعداد مشروع بحث خاص بتطوير عمل إحدى الشركات الصناعية الأردنية، قام الباحث بتقسيم المشروع إلى أنشطة متتابعة، وقدر الأزمنة التي يحتاجها كل نشاط في حالات التفاؤل، والأكثر احتمالاً، والتشاؤم، أيضاً قام برسم شبكة الأعمال لمشروع البحث، وعلى النحو الآتي:

Activity	Optimistic	Most Likely	Pessimistic
A	3	4	5
B	6	7	14
C	2	3	10
D	6	9	12
E	4	5	12
F	1	3	11
G	1	2	9
H	2	5	8
I	1	4	7



أ. حدد المسار الحرج للمشروع.

ب. ما هي احتمالية إتمام المشروع في (22) أسبوع.

5. قرر مجلس إدارة شركة الأردن لصناعة التحف الشرقية تطوير منتج جديد لطرحه في السوق المحلي. الجدول التالي يبن الأنشطة الأساسية والأوقات والتكاليف التي يحتاجها المشروع

Activity	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost	Immediate Predecessor
A	4	3	2000	2600	-
B	2	1	2200	2800	-
C	3	3	500	500	-
D	8	4	2300	2600	A
E	6	3	900	1200	B
F	3	2	3000	4200	C
G	4	2	1400	2000	D,E

المطلوب:

أ. ما هو الزمن المتوقع لإكمال المشروع.

ب. ما هو مجموع تكاليف إكمال المشروع في الوقت العادي له.

ج. إذا أردنا تخفيض زمن المشروع يوم واحد فقط، ما هي الأنشطة التي سيتم تعجيلها، وما تأثير ذلك على التكاليف الكلية.

د. صياغة نموذج البرمجة الخطية لشبكة الأعمال

6. الجدول التالي يبن مجموعة الأنشطة التي تمثل أحد المشاريع الصناعية

Activit y	Immediate Predecessor
A	-
B	-
C	B
D	B
E	A, C
F	D
G	E, F
H	B
I	G, H

المطلوب: رسم شبكة الأعمال باستخدام طريقة النشاط على السهم AOA

7. يتطلب تطوير برنامج إداري تسعة أنشطة رئيسة، الجدول التالي يبين الأزمنة التقديرية لإنجاز المشروع

Activity	Immediate Predecessor	a	m	b
A	-	2	5	8
B	A	3	6	9
C	A	4	7	10
D	B	2	5	14
E	D	3	3	3
F	C	6	8	10
G	E, F	1	1	1
H	C	6	10	14
I	G, H	3	4	5

المطلوب:

أ. رسم الشبكة باستخدام طريقة النشاط على الدائرة AON.

ب. ما هي أنشطة المسار الحرج؟

ج. حساب متوسط الزمن لكل نشاط.

د. حساب التباين لكل نشاط.

ه. حساب الزمن المتوقع لإكمال المشروع.

و. حساب الانحراف المعياري للمشروع.

8. قرر مدير المشاريع في شركة الشمال للإنشاء والتعمير تطوير تصميم جديد للمباني السكنية لطرحه في السوق المحلي. الجدول التالي يبن الأنشطة الأساسية والأوقات والتكاليف التي يحتاجها المشروع

Activity	Normal Time	Crash Time	Normal Cost	Crash Cost	Immediate Predecessor
A	4	3	2,000	2,600	-
B	5	3	2,200	2,800	-
C	3	3	500	500	-
D	8	4	2,400	2,600	A
E	6	3	900	1,200	B
F	3	2	3,000	4,200	C
G	4	2	1,700	2,000	D,E

المطلوب:

أ. ما هو الزمن المتوقع لإكمال المشروع.

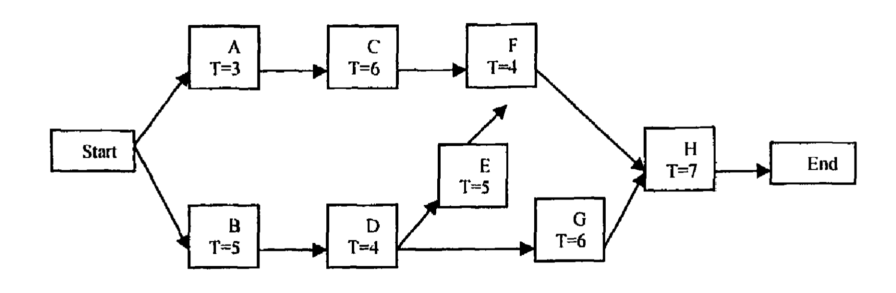
ب. ما هو مجموع تكاليف إكمال المشروع في الوقت العادي له.

ج. إذا أردنا تخفيض زمن المشروع أسبوعين واحد فقط، ما هي الأنشطة التي سيتم تعجيلها، وما تأثير ذلك على التكاليف الكلية.

د. ما مقدار التكلفة المضافة إذا أردنا إتمام المشروع في أقل وقت ممكن؟

ه. صياغة نموذج البرمجة الخطية لتعجيل المشروع.

9. يبين الشكل التالي المخ الشبكي لمشروع تطوير برنامج محاسبي



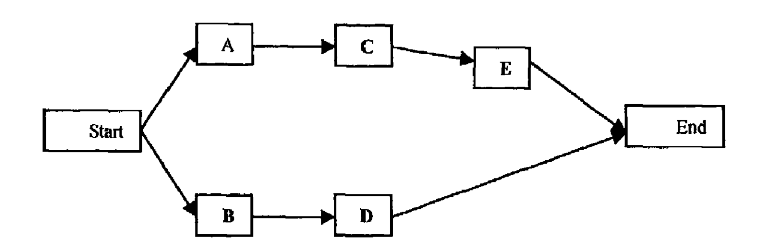
المطلوب:

1. ما هي أنشطة المسار الحرج.

2. ما هو الزمن المتوقع لإنجاز المشروع.

10. يتطلب تطوير برنامج إداري خمسة أنشطة رئيسة، الجدول التالي يبين الأزمنة التقديرية لإنجاز المشروع

النشاط	الأسبقية	a	m	b
A	-	2	5	8
B	-	3	6	9
C	A	4	7	10
D	B	2	5	14
E	C	3	3	3



ما هي أنشطة المسار الحرج، وما هو زمن إنجاز المشروع؟

أسئلة الاختيار من متعدد Multiple Choice Questions

1. الزمن الفائض في شبكة الأعمال هو:

أ. الزمن المتاح لتأخير تنفيذ النشاط في المشروع.

ب. ب.أقصر فترة من الزمن يتطلبها إكمال النشاط .

ج. الزمن المتوقع لإنجاز النشاط.

د. الزمن الذي يستهلكه النشاط في المشروع.

2. لحظة من الزمن تحدد بداية ونهاية النشاط في المشروع:

أ. الحدث

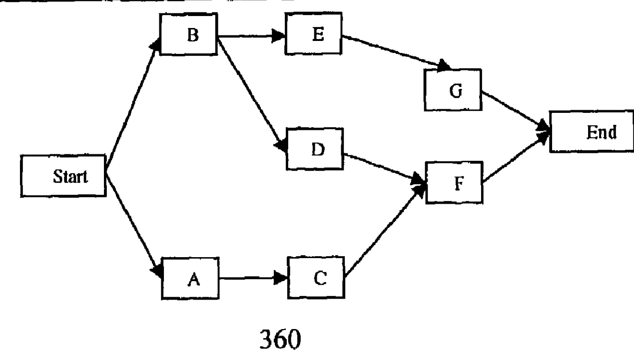
ب. الزمن الذي يتطلبه تنفيذ النشاط.

ج. نشاط المشروع.

د. حزمة العمل.

يتطلب تطوير نظام معلومات سبعة أنشطة رئيسة، الجدول التالي يبين الأزمنة التقديرية (بالأيام) لإنجاز المشروع، و يبين الشكل التالي المخطط الشبكي للمشروع، أجب عن الأسئلة: 3- 7

Activity	Optimistic	Most Likely	Pessimistic
A	3	4	5
B	6	7	14
C	2	3	10
D	0.5	1	1.5
E	6	9	12
F	4	5	12
G	1	3	11



3. **أنشطة المسار الحرج هي:**

أ. B-D-F. ب. B-E-G. ج. A-C-F. د. A-B-D-F

4. **الزمن المتوقع لإنجاز المشروع يساوي:**

أ. 20 يوم ب. 18 يوم ج. 21 يوم د. 25 يوم

5. **الانحراف المعياري للمسار الحرج يساوي:**

أ. 5.56 ب. 6 ج. 2.5 د. 2.36

6. **تباين النشاط (E) يساوي:**

أ. 1 ب. 36 ج. 1/36 د. 3

7. **الزمن المتوقع للنشاط (B) يساوي:**

أ. 6 ب. 9 ج. 7 د. 8

8. **الانحراف المعياري لزمن إكمال المشروع يساوي:**

أ. 1.489 ب. 2.22 ج. 1.794 د. 3.22

9. **تباين النشاط (E) يساوي:**

أ. غير محدد ب. 0 ج. 3 د. 1

10. **ما هي إحتماية إنجاز المشروع بأكثر من زمنه المتوقع بيوم واحد، إذ علمت أن المساحة تحت القيمة (0.67) تساوي (0.7486):**

أ. 67٪ ب. 74.86٪ ج. 74.89٪ د. 748.6

11. **المسار الذي يتكون من مجموعة الأنشطة المتتابعة من بداية المشروع إلى نهايته والذي يتطلب زمناً أكثر من كافة المسارات في الشبكة، وهو:.**

أ. المسار الحرج. ب. المسار المغلق. ج. النشاط الأساسي. د. النشاط الوهمي

12. استخدام المخطط الشبكي لعرض حزم عمل وأنشطة المشروع ضمن تسلسل منطقي، هو:

أ. طريقة المسار الحرج.

ب. البنية التحتية لأنشطة المشروع.

ج. مخطط الموارد.

د. البنية التحتية لتنظيم المشروع.

13. - - - - - - - - هو نشاط يترتب على أي تأخير كان طفيفاً في زمن تنفيذه تأخير في زمن تنفيذ كامل المشروع.

أ. النشاط الحرج. ب. المسار. ج. النشاط الأساسي. د. النشاط الوهمي

14. إن الجهة التي يتم القيام بالمشروع لحسابها قد ترغب في إنجاز المشروع في فترة أقل من تلك المدة الزمنية التي تم تحديدها بشكل مبدئي، وتعرف هذه الحالة:

أ. تعجيل المشروع. ب. إدارة المشروع. ج. إنهاء المشروع. د. وقت إتمام المشروع

15. الزمن الذي يتم اعتماده إذا كانت كافة الظروف البيئية تسير في غير مصلحة تنفيذ المشروع.

أ. زمن التفاؤل. ب. زمن المشروع. ج. زمن التشاؤم. د. زمن الأكثر احتمالي

12.8 مصادر الفصل الثامن

1. البلخي، زيد تميم (2007). مقدمة في بحوث العمليات. (ط2)، المملكة العربية السعودية ، الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.
2. الفضل، مؤيد عبد الحسين (2008). الأساليب الكمية والنوعية في دعم قرارات المنظمة. الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.
3. Anderson, David R., Sweeney, Dennis J., Williams, Thomas A., & Martin, R. Kipp (2007). **An Introduction to Management Science: A Quantitative Approach to Decision Making.** (12th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company..
4. Hillier, Fredrick S., & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill.
5. Krajeweski, Lee, Ritzman, Larry, & Malhotra, Manoj (2007). **Operations Management: Processes and Value Chains.** (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
6. Nicholas, John M. (2001). **Project Management for Business Technology: Principles and Practice**. (2ed ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
7. Render, Barry; Stair Jr., Ralph M., & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.
8. Stevenson, William J., & Ozgur, Ceyhun (2006). **Introduction to Management Science with Spreadsheets.** Maidenhead, UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin
9. Taylor III, Bernard W. (2007). **An Introduction to Management Science**. (9th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

المصادر

◆المصادر العربية

1. بلال، محمد اسماعيل (2005). **بحوث العمليات: استخدام الأساليب الكمية في صنع القرار.** جمهرية مصر العربية، الإسكندرية: دار الجامعة الجديدة.

2. البلخي، زيد تميم (2007). **مقدمة في بحوث العمليات.** (ط2)، المملكة العربية السعودية، الرياض: منشورات جامعة الملك سعود.

3. بقجه جي، صلاح الدين، ومعلا، وائل، ونايفه، محمد، ومراد، حسا، والعوا، محمد نوار (1998). **بحوث العمليات** (مترجم)، سوريا، دمشق: المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر.

4. الحسنية، سليم ابراهيم (2002). **نظم المعلومات الإدارية.** الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

5. حمدان، فتحي خليل، و رشيق رفيق (2002). **مقدمة في بحوث العمليات (ط3).** الأردن، عمان: دار وائل للنشر والتوزيع.

6. الطراونة، محمد، وعبيدات، سليمان (2009). **مقدمة في بحوث العمليات.** الأردن، عمان: دار المسيرة للنشر والتوزيع.

7. العبيدي، محمود، والفضل، مؤيد عبد الحسين (2004). **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال.** الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

8. العتيبي، صبحي جبر (2005). **تطور الفكر والأساليب في الإدارة.** الأردن، عمان: دار الحامد للنشر والتوزيع.

9. علي، علي حسين؛ الفضل، مؤيد عبد الحسين، وإبراهيم، نجاح باقر (1999). **بحوث العمليات وتطبيقاتها في وظائف المنشأة.** الأردن، عمان: دار زهران للنشر والتوزيع.

10. الفضل، مؤيد عبد الحسين (2008). **الأساليب الكمية والنوعية في دعم قرارات المنظمة.** الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

11. الفضل، مؤيد عبد الحسين (2006). **المنهج الكمي في إدارة الأعمال: نماذج قرارات وتطبيقات عملية.** . الأردن، عمان: مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع.

12. الفياض، محمود، وقدادة، عيسى (2007). **بحوث العمليات.** الأردن، عمان: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.

13. مرسي، نبيل محمد (2006). **أساليب التحليل الكمي.** جمهورية مصر العربية، الإسكندرية: المكتب الجامعي الحديث.

◆المصادر الأجنبية

14. Anderson, David R. , Sweeney, Dennis J. , & Williams, Thomas A. (2004). **An Introduction to Management Science.** (11th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company.

15. Anderson, David R. , Sweeney, Dennis J. , Williams, Thomas A. , & Martin, R. Kipp (2007). **An Introduction to Management Science: A Quantitative Approach to Decision Making.** (12th ed.), USA, St Paul. MN: West Publishing Company. .

16. Bixby, R E. (2002). Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress, ***Operations Research***, 50(1): 3-15, Jan-Feb.

17. Clemen, R. T. , and T. Reily (2001). **Making Hard Decisions with Decision Tools**. Duxbury Press, Pacific Grove, CA.

18. Dewhurst, Frank. (2002). **Quantitative Methods for Business and Management**. UK, London: McGraw-Hill Education.

19. Goodwin, P. , and G. Wright. (1998). **Decision Analysis for Management Judgment**. USA, New York: Wiley.

20. Higle, J. L. , and S. W. Wallace (2003). Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming, **Interfaces**, 33(4), July-August.

21. Hillier, Fredrick S. , Hillier, Mark S. , & Hillier, Mark. (2002). **Introduction to Management Science: A Modeling and case studies Approach**. (2ed ed.), UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin.

22. Hillier, Fredrick S. , & Lieberman, Gerald J. (2005). **Introduction to Operations Research**. (8th ed.), USA, New York: McGraw-Hill.

23. Krajeweski, Lee, Ritzman, Larry, & Malhotra, Manoj (2007). **Operations Management: Processes and Value Chains**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

24. Nicholas, John M. (2001). **Project Management for Business Technology: Principles and Practice**. (2ed ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

25. Powell, Stephen G. , & Baker, Kenneth R. (2007). **Management Science: The Art of Modeling with Spreadsheets**. (2ed ed.), USA, New York: Wiley.

26. Render, Barry; Stair Jr. , Ralph M. , & Hanna Michael (2003). **Quantitative Analysis for Management**. (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

27. Stevenson, William J. , & Ozgur, Ceyhun (2006). **Introduction to Management Science with Spreadsheets.** Maidenhead, UK, Berk: McGraw-Hill/Irwin

28. Taha, Hamdy A. , (2007). **Operations Research: An Introduction.** (8th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

29. Taylor III, Bernard W. (2007). **An Introduction to Management Science.** (9th ed.), USA, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Pearson Education, Inc.

30. Winston, Wayne L. (2003). **Operations Research: Applications and Algorithms.** (4th ed.), Duxbury Press.

31. Vanderbei, R. J. (2001). **Linear Programming: Foundations and Extensions.** (2ed ed.), USA, **Boston, MA: Kluwer Academic Publisher.**

